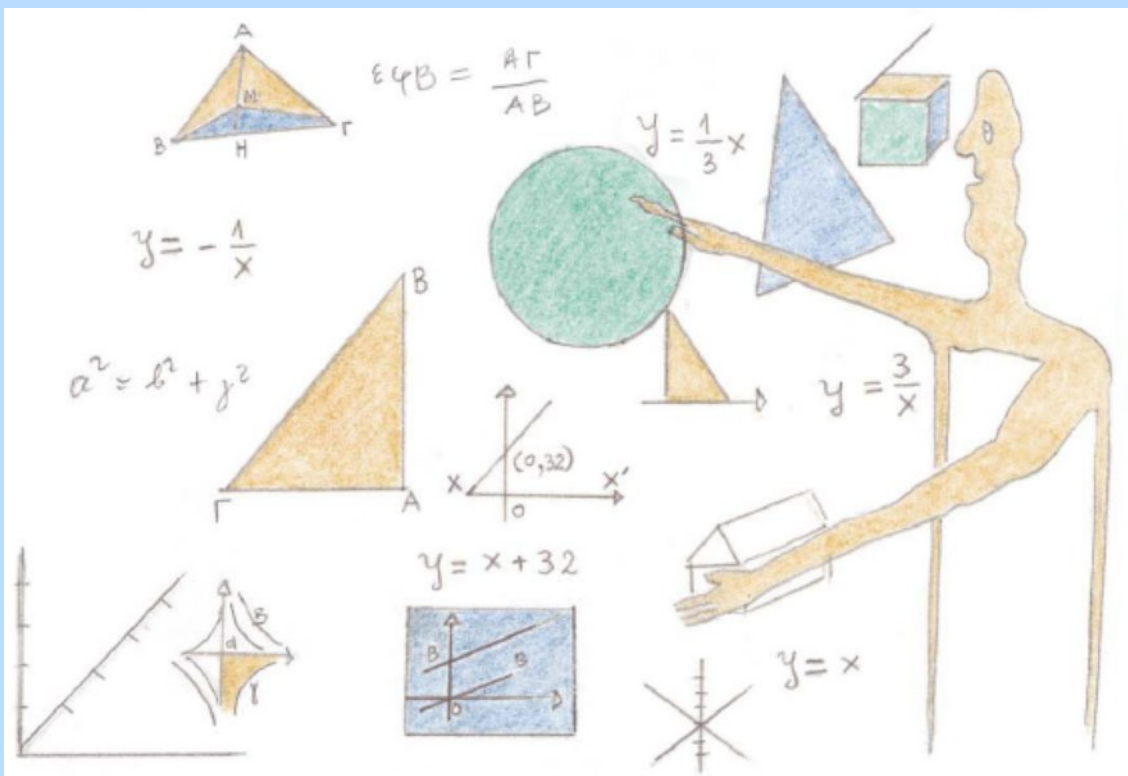


**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ**

**Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Β΄ Γυμνασίου

ΜΕΡΟΣ Β΄ – Τόμος 1ος

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄

Τόμος 1ος ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.1 – 2.3

**Γ' Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 /
Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:**

**«Αναμόρφωση των προγραμμάτων
σπουδών και συγγραφή νέων
εκπαιδευτικών πακέτων»**

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος

Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ

Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων
βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού
εκπαιδευτικού υλικού με βάση το
ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»**

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου

Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου

Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου

Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από

το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και

25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Παναγιώτης Βλάμος, *Μαθημ/κός,
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*

Παναγιώτης Δρούτσας, *Μαθημ/κός,
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*

Γεώργιος Πρέσβης, *Μαθημ/κός
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*

Κων/νος Ρεκούμης, *Μαθημ/κός,
Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Βασίλειος Γιαλαμάς,
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Χαράλαμπος Τουμάσης, *Σχολικός
Σύμβουλος Μαθηματικών*

Πολυξένη Ρόδου, *Μαθηματικός,
Εκπ/κός Β/θμιας Εκπαίδευσης*

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Θεοδόσης Βρανάς, *Σκιτσογράφος -
Εικονογράφος*

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

**Ευγενία Βελάγκου, Φιλολόγος
*Εκπ/κός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης***

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ

ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

**Γεώργιος Πολύζος, Πάρεδρος ε.θ.
*του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου***

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

**Γεώργιος Μήλιος, Ζωγράφος-
*Χαράκτης***

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και

75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ**

**Παναγιώτης Βλάμος
Παναγιώτης Δρούτσας
Γεώργιος Πρέσβης
Κωνσταντίνος Ρεκούμης**

Μαθηματικά

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

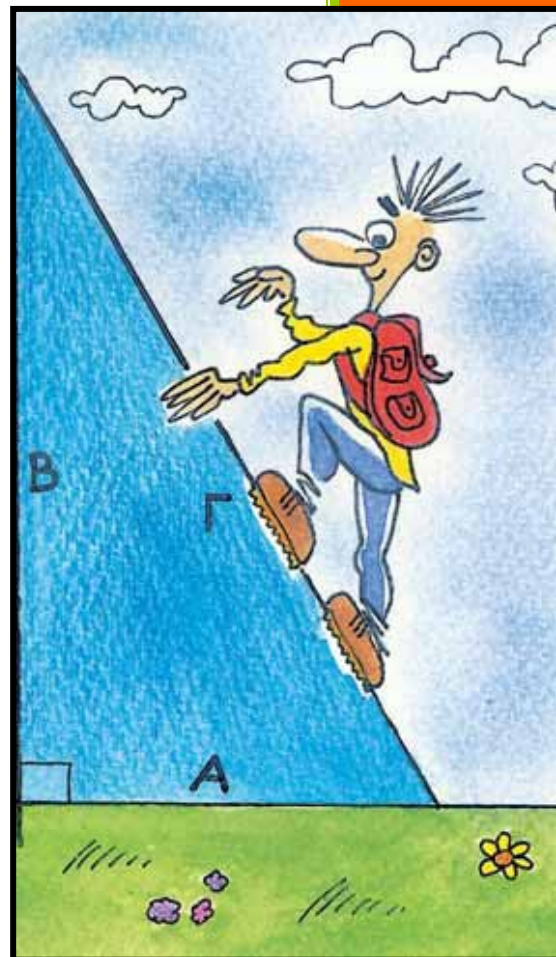
ΜΕΡΟΣ Β΄

**Τόμος 1ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1.1 – 2.3**

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων



Πυθαγόρειο Θεώρημα

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

- 1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας
- 1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών
- 1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων
- 1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

Οι πλημμύρες του Νείλου, του Τίγρη και του Ευφράτη, πριν από περίπου τρεις χιλιαίτες, ανάγκασαν τους λαούς που κατοικούσαν στην περιοχή να αναπτύξουν την «τέχνη» της μέτρησης της γης (Γεω-μετρία). Τότε αναπτύχθηκε η έννοια του εμβαδού, την οποία θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο αυτό. Θα μάθουμε τις βασικές μονάδες



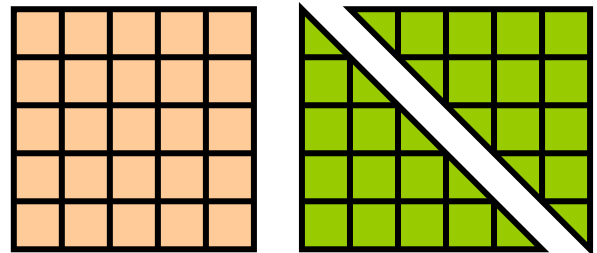
μέτρησης εμβαδών, καθώς και τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού: τετραγώνου, ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.

Στο τέλος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και θα εξετάσουμε αρκετές εφαρμογές του.

1.1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές 5 cm και ένα τετράγωνο πλευράς 5 cm.




α) Μπορείτε χρησιμοποιώντας τα τρία αυτά σχήματα να κατασκευάσετε:

i) Ένα ορθογώνιο πλάτους 10 cm και ύψους 5 cm;

ii) Ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι 10 cm;

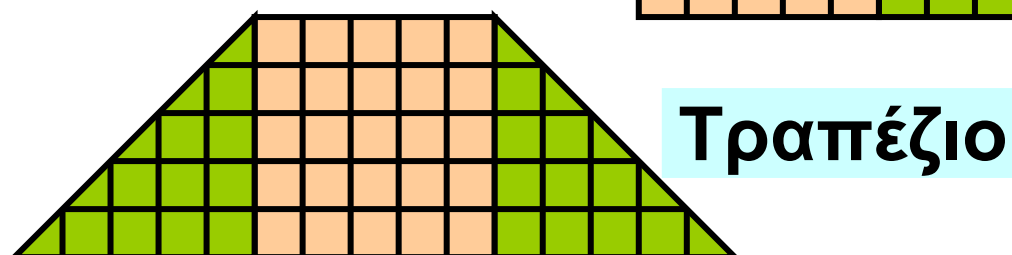
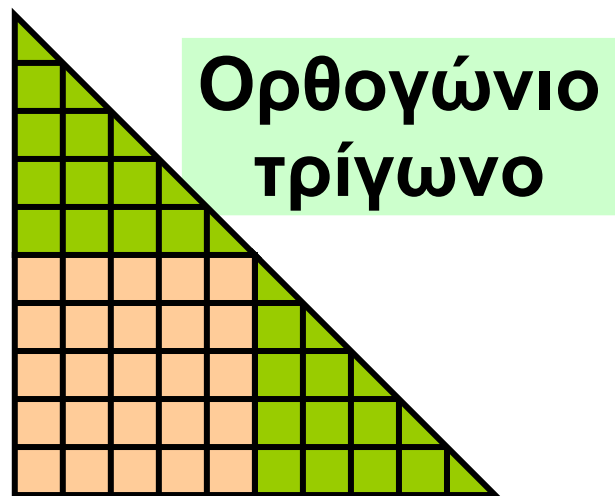
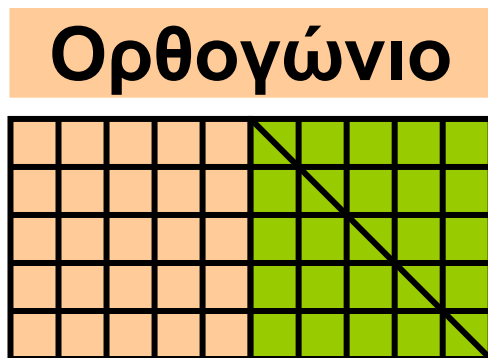
iii) Ένα ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις 5 cm και 15 cm;

β) Τι έκταση καταλαμβάνουν τα παραπάνω σχήματα στο επίπεδο, αν

θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης
το τετραγωνάκι  πλευράς 1 cm;

Λύση

α) Έχουμε τα παρακάτω σχήματα:



β) Μετρώντας τα τετραγωνάκια πλευράς 1 cm βρίσκουμε ότι το ορθογώνιο καταλαμβάνει

έκταση 50, το τραπέζιο 50 και το ορθογώνιο τρίγωνο πάλι 50.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα τρία



νέα σχήματα που προκύπτουν, παρόλο που είναι διαφορετικά μεταξύ τους, καταλαμβάνουν την ίδια έκταση στο επίπεδο, γιατί αποτελούνται ακριβώς από τα ίδια στοιχεία: το τετράγωνο και τα δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα. Για να δηλώσουμε ότι τα τρία αυτά σχήματα που κατασκευάσαμε, καταλαμβάνουν την ίδια έκταση στο επίπεδο, λέμε ότι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Για να μετρήσουμε το εμβαδόν, πρέπει πρώτα να επιλέξουμε μία μονάδα μέτρησης.

Αν, αρχικά, επιλέξουμε ως μονάδα μέτρησης το ένα από τα δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, τότε τα τρία νέα σχήματα έχουν εμβαδόν 4.

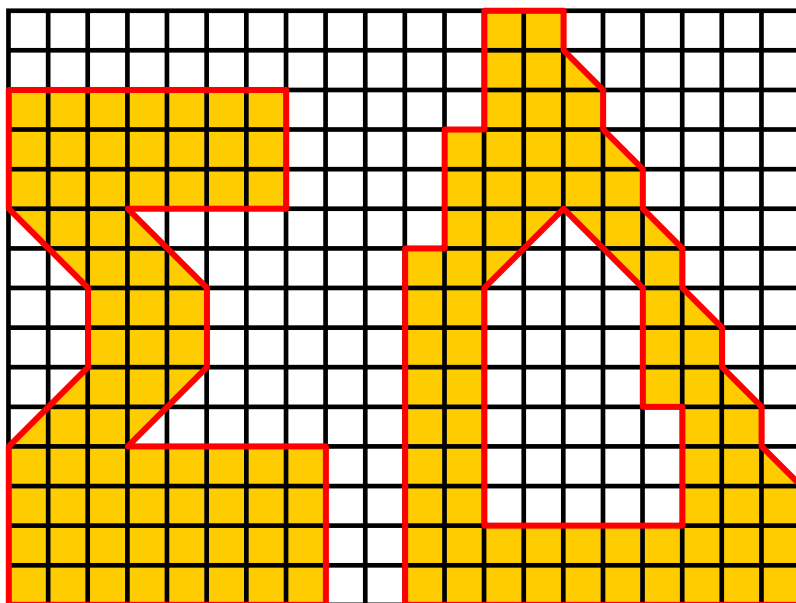
Αν επιλέξουμε ως μονάδα μέτρησης το τετραγωνάκι πλευράς 1 cm, τότε, όπως είδαμε, θα έχουν εμβαδόν 50.

Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.


ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού:




α)  β)  γ) 



Λύση:

α) Μετρώντας τα τετραγωνάκια  που υπάρχουν μέσα σε κάθε σχήμα παρατηρούμε ότι είναι 71.

Άρα $E = 71$.

β) Αφού κάθε τριγωνάκι  έχει το μισό εμβαδόν από κάθε τετραγωνάκι , τα δύο εμβαδά με μονάδα μέτρησης το  θα είναι $2 \cdot 71 = 142$.


Άρα $E = 142$.

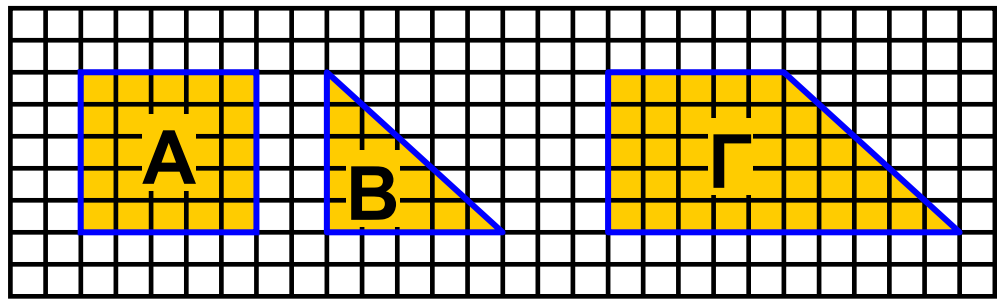
γ) Αφού κάθε  έχει το διπλάσιο εμβαδόν από κάθε τετραγωνάκι , τα δύο εμβαδά με μονάδα μέτρησης

το  θα είναι $\frac{71}{2} = 35,5$.

Άρα $E = 35,5$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων A, B, Γ χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδών το . Τι παρατηρείτε;



Λύση:

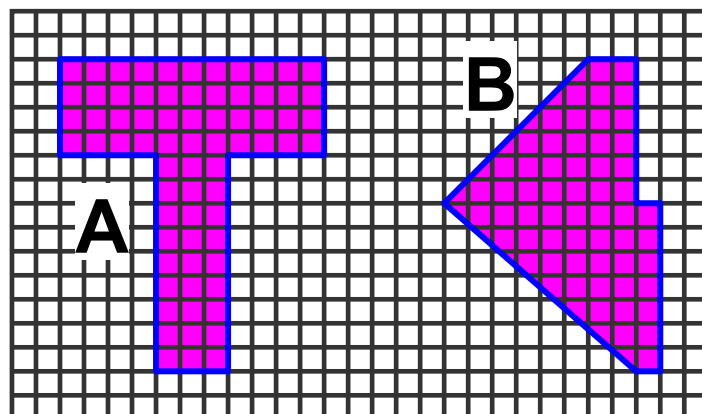
Βρίσκουμε ότι τα εμβαδά των Α, Β, Γ είναι Α: 25, Β: 12,5, Γ: 37,5.

Επομένως, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του Γ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών Α και Β, κάτι που γίνεται φανερό αν «ενώσουμε» κατάλληλα τα σχήματα Α και Β.

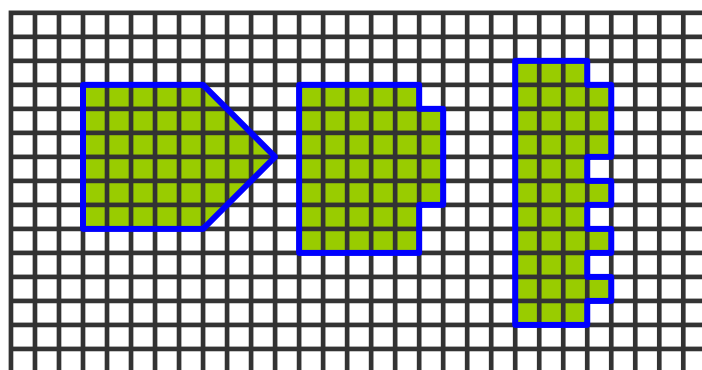
ΑΣΚΗΣΕΙΣ



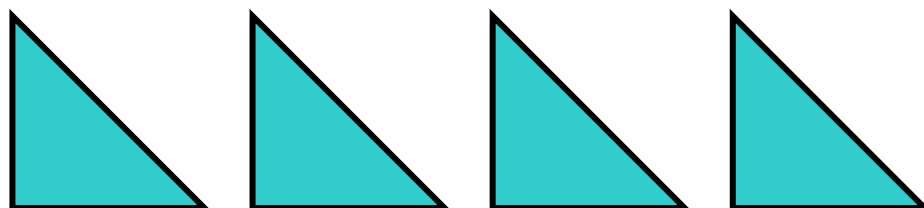
1 Ποιο από τα δύο σχήματα Α, Β έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



2 Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας ως μονάδα εμβαδού το \blacksquare . Τι παρατηρείτε;



3 Δίνονται τέσσερα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με ίσες κάθετες πλευρές:



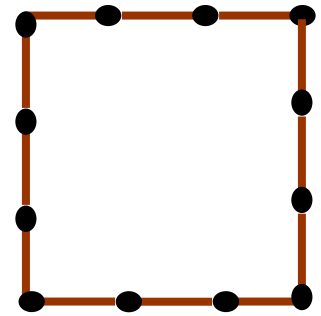
α) Χρησιμοποιώντας μόνο τα δύο τρίγωνα να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο.

β) Χρησιμοποιώντας και τα 4 τρίγωνα, (μια φορά το καθένα) να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο και ένα τραπέζιο.

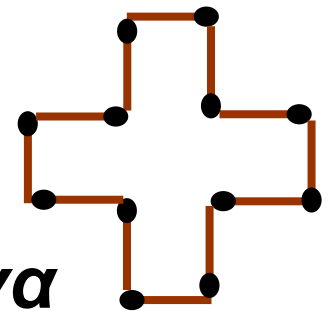
ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:



Στο διπλανό σχήμα χρησιμοποιήσαμε 12 σπέρτα για να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 9 τετράγωνα πλευράς ενός σπέρτου!



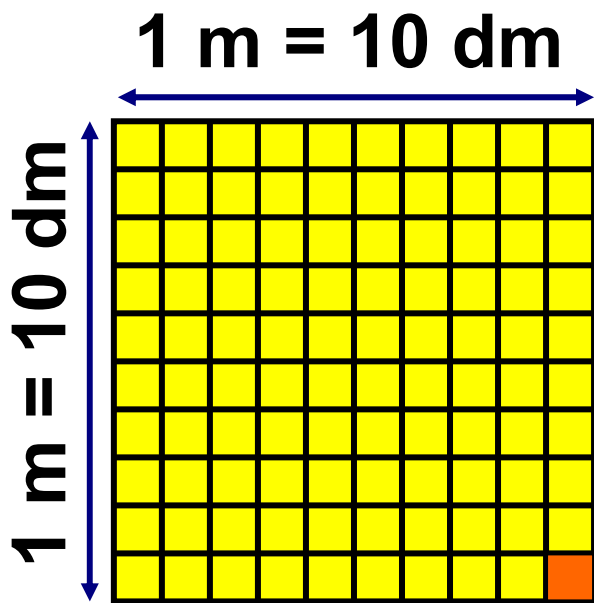
Αν τοποθετήσουμε, όμως, με διαφορετικό τρόπο τα 12 αυτά σπέρτα, μπορούμε να σχηματίσουμε σχήματα με άλλο εμβαδόν. Για παράδειγμα, το διπλανό σχήμα (σταυρός) έχει εμβαδόν ίσο με 5 τετράγωνα πλευράς ενός σπέρτου.



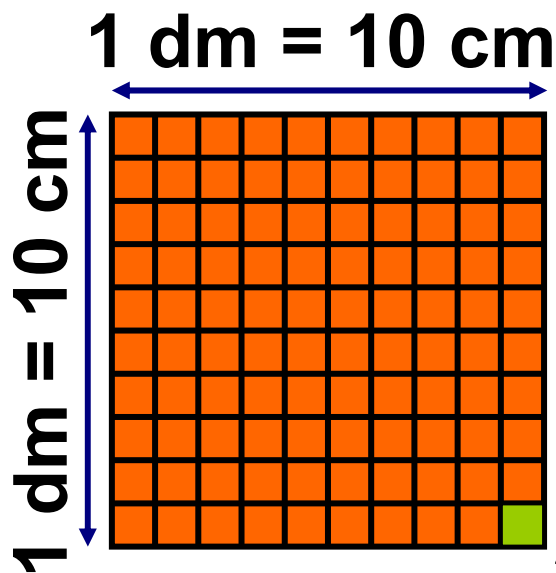
Μπορείτε να τοποθετήσετε με άλλο τρόπο τα 12 αυτά σπέρτα, ώστε να προκύψουν σχήματα με εμβαδά 8, 7, 6, 4, 3 τετράγωνα πλευράς ενός σπέρτου;

1.2. Μονάδες μέτρησης επιφανειών

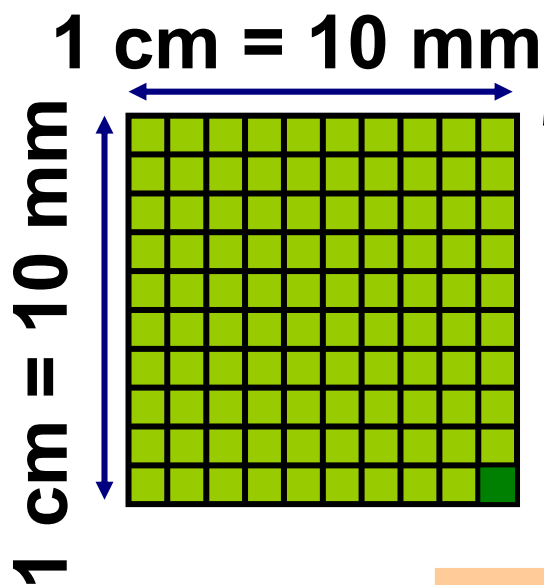
- Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1 m. Το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού λέγεται **τετραγωνικό μέτρο (1 m^2)** και το χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης εμβαδών.
- Αφού $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, το τετραγωνικό μέτρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 dm. Το εμβαδόν σε κάθε τετραγωνάκι ονομάζεται **τετραγωνικό δεκατόμετρο ή τετραγωνική παλάμη (1 dm^2)**. Παρατηρούμε ότι $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$.
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τετράγωνο πλευράς 1 dm. Αφού $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$, το τετραγωνικό δεκατόμετρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 cm. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 cm



$1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2$



$1\text{ dm}^2 = 100\text{ cm}^2$



$1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2$



λέγεται **τετραγωνικό εκατοστόμετρο** ή **τετραγωνικός πόντος** (1 cm^2).

Παρατηρούμε ότι $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$.

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τετράγωνο πλευράς 1 cm . Αφού $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$, το τετραγωνικό εκατοστόμετρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 mm . Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 mm λέγεται **τετραγωνικό χιλιοστόμετρο** (1 mm^2).

Παρατηρούμε ότι $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$.

- Άλλες μονάδες μέτρησης εμβαδών είναι:

- **Το τετραγωνικό χιλιόμετρο** (1 km^2), το οποίο ισούται με το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς 1000 m .

Επομένως

$1 \text{ km}^2 = 1000 \cdot 1000 = 1.000.000 \text{ m}^2$.

Χρησιμοποιείται κυρίως για τη

μέτρηση μεγάλων εκτάσεων, όπως είναι η έκταση που καταλαμβάνει ένα κράτος, ένας νομός ή ένα νησί.

- Το **στρέμμα**, το οποίο ισούται με 1000 m^2 και χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση των εμβαδών οικοπέδων και κτημάτων.

❖ Συνοψίζοντας τα παραπάνω σχηματίζουμε τον πίνακα:

$1 \text{ m}^2 =$	$100 \text{ dm}^2 =$
$= 10.000 \text{ cm}^2 =$	$1.000.000 \text{ mm}^2$

$1 \text{ dm}^2 =$	$100 \text{ cm}^2 =$	10.000 mm^2
--------------------	----------------------	-----------------------

$1 \text{ cm}^2 =$	100 mm^2
--------------------	--------------------

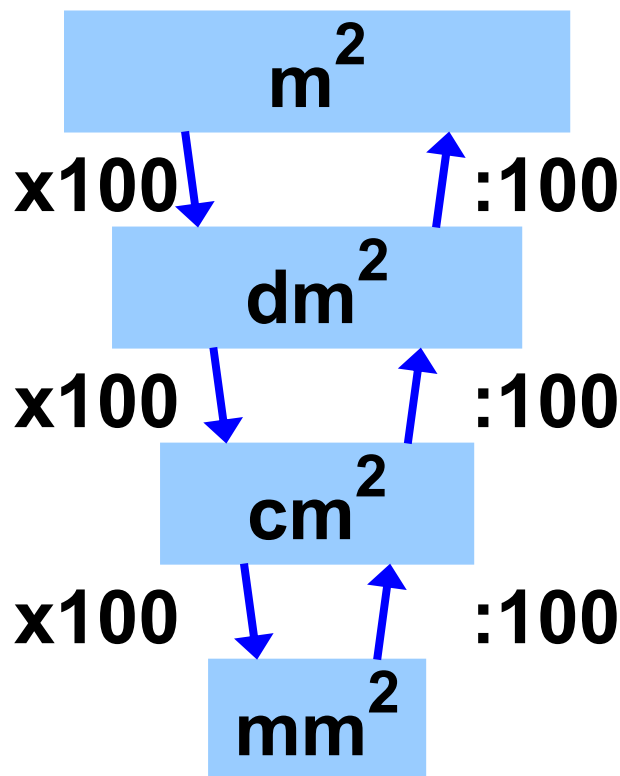
$1 \text{ mm}^2 =$	$0,01 \text{ cm}^2 =$
$= 0,0001 \text{ dm}^2 =$	$0,000001 \text{ m}^2$

$1 \text{ cm}^2 =$	$0,01 \text{ dm}^2 =$	$0,0001 \text{ m}^2$
--------------------	-----------------------	----------------------

$1 \text{ dm}^2 =$	$0,01 \text{ m}^2$
--------------------	--------------------

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Με τη βοήθεια του σχήματος μετατροπής μονάδων εμβαδού, να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.



m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253			
	320		
		7122	
			12653

Λύση:

Σύμφωνα με το πιο πάνω σχήμα, για να μετατρέψουμε ένα εμβαδόν στην αμέσως μικρότερη μονάδα, πολλαπλασιάζουμε με το 100, ενώ για να το μετατρέψουμε στην αμέσως μεγαλύτερη μονάδα, διαιρούμε με το 100. Επομένως:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253	25300	2530000	253000000
3,20	320	32000	3200000
0,7122	71,22	7122	712200
0,012653	1,2653	126,53	12653

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω εμβαδά:

α) $3,7 dm^2$, $7 cm^2$, $4,3 cm^2$, $3,7 m^2$.

β) $40 cm^2$, $42 mm^2$, $40 dm^2$, $3 m^2$.

$$\gamma) 1453 \text{ mm}^2, 14,5 \text{ cm}^2, 1,4 \text{ dm}^2, 0,14 \text{ m}^2.$$

Λύση:

α) Μετατρέπουμε τα τέσσερα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης:

$$3,7 \text{ dm}^2 = 370 \text{ cm}^2,$$

$$3,7 \text{ m}^2 = 37000 \text{ cm}^2, \text{ οπότε:}$$

$$4,3 \text{ cm}^2 < 7 \text{ cm}^2 < 3,7 \text{ dm}^2 =$$

$$= 370 \text{ cm}^2 < 3,7 \text{ m}^2 = 37000 \text{ cm}^2.$$

$$\beta) 42 \text{ mm}^2 < 40 \text{ cm}^2 =$$

$$= 4000 \text{ mm}^2 < 40 \text{ dm}^2 =$$

$$= 400000 \text{ mm}^2 < 3 \text{ m}^2 = 3000000 \text{ mm}^2$$

$$\gamma) \text{ Αφού } 14,5 \text{ cm}^2 = 1450 \text{ mm}^2,$$

$$1,4 \text{ dm}^2 = 14000 \text{ mm}^2 \text{ και } 0,14 \text{ m}^2 =$$

$$= 140000 \text{ mm}^2, \text{ έχουμε ότι:}$$

$$14,5 \text{ cm}^2 < 1453 \text{ mm}^2 < 1,4 \text{ dm}^2 < 0,14 \text{ m}^2.$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1 $6,2 \text{ m}^2 =$			
A	62 cm^2	B	620 cm^2
Γ	62000 cm^2	Δ	$0,62 \text{ cm}^2$

2 $6,2 \text{ mm}^2 =$			
A	62 cm^2	B	620 cm^2
Γ	$0,62 \text{ cm}^2$	Δ	$0,062 \text{ cm}^2$

3 $6,2 \text{ cm}^2 =$			
A	62 m^2	B	$0,62 \text{ m}^2$
Γ	620 m^2	Δ	$0,00062 \text{ m}^2$

4 $6,2 \text{ cm}^2 =$			
A	620 mm^2	B	6200 mm^2
Γ	$0,62 \text{ mm}^2$	Δ	$0,00062 \text{ mm}^2$

5 $6,2 \text{ m}^2 =$			
A	62 dm^2	B	620 dm^2
Γ	62000 dm^2	Δ	$0,062 \text{ dm}^2$

6 $6,2 \text{ mm}^2 =$			
A	$0,0000062 \text{ m}^2$	B	$0,00062 \text{ m}^2$
Γ	$0,062 \text{ m}^2$	Δ	$0,0062 \text{ m}^2$

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Για να μετατρέψουμε:

1. m^2 σε dm^2	
A	πολλαπλασιάζουμε με 100
B	διαιρούμε με 100
Γ	διαιρούμε με 10

2. dm^2 σε cm^2	
A	διαιρούμε με 100
B	πολλαπλασιάζουμε με 100
Γ	διαιρούμε με 10

3. cm^2 σε mm^2

A διαιρούμε με 100

B διαιρούμε με 10

Γ πολλαπλασιάζουμε με 100

4. dm^2 σε m^2

A πολλαπλασιάζουμε με 100

B διαιρούμε με 100

Γ διαιρούμε με 10

5. cm^2 σε dm^2

A πολλαπλασιάζουμε με 10.000

B πολλαπλασιάζουμε με 100

Γ διαιρούμε με 100

6. mm^2 σε cm^2

A διαιρούμε με 100

B πολλαπλασιάζουμε με 100

Γ διαιρούμε με 10

7. m^2 σε cm^2

A διαιρούμε με 100

B πολλαπλασιάζουμε με 10.000

Γ διαιρούμε με 10.000

8. m^2 σε mm^2

A πολλαπλασιάζουμε με 1.000.000

B διαιρούμε με 100.000

Γ διαιρούμε με 1.000

9. cm^2 σε m^2

A διαιρούμε με 100

B διαιρούμε με 10.000

Γ πολλαπλασιάζουμε με 10.000

10. mm^2 σε dm^2

A διαιρούμε με 100

B πολλαπλασιάζουμε με 10.000

Γ διαιρούμε με 10.000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1 Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη:

32 cm^2 , 312 cm^2 , 127 km^2 , 710 dm^2 ,
12720 mm^2 , 212 dm^2 , 1280 mm^2 ,
79 km^2 .

2 Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω μεγέθη:

12 m^2 , 175 dm^2 , 456 m^2 , 136 m^2 ,
 3 km^2 , 1750 mm^2 , 256 km^2 .

3 Να μετατρέψετε σε mm^2 τα παρακάτω μεγέθη:

12 km^2 , 431 m^2 , 17 dm^2 , 236 cm^2 .

4 Να μετατρέψετε σε km^2 τα παρακάτω μεγέθη:

7233 mm^2 , 4321 cm^2 , 6322 dm^2 ,
 14632 mm^2 , 560 m^2 .

5 Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τις κατατάξετε κατά σειρά

μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

α) 13850 mm^2 , $0,23 \text{ m}^2$, $0,48 \text{ m}^2$,
 670 cm^2 , $13,7 \text{ dm}^2$.

β) 32 dm^2 , $1,23 \text{ m}^2$, 23270 mm^2 ,
 1356 cm^2 .

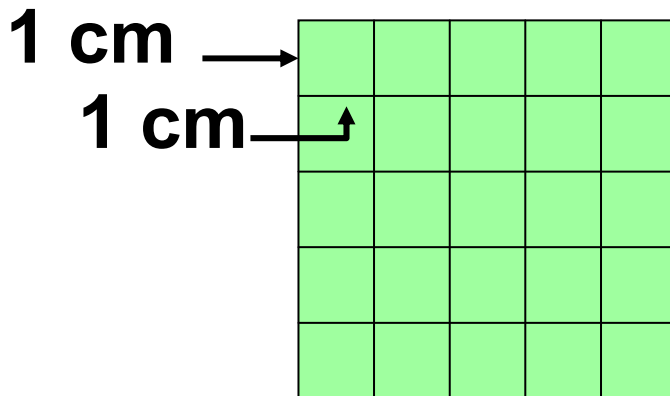
6 Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν:

- α) του δωματίου μας,
- β) της Κρήτης,
- γ) ενός αγρού,
- δ) ενός γραμματόσημου,
- ε) ενός φύλλου τετραδίου.



1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

Εμβαδόν τετραγώνου

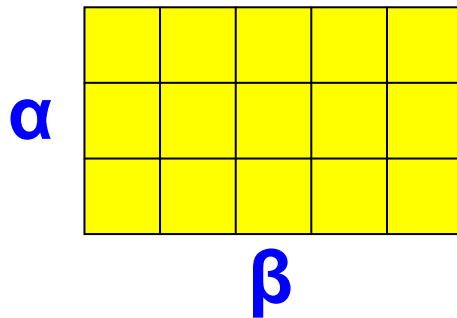


Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 5 cm. Μπορούμε να το χωρίσουμε σε $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 cm, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 cm^2 . Άρα, το τετράγωνο έχει εμβαδόν 25 cm^2 .

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς a ισούται με a^2 .

Εμβαδόν ορθογωνίου



Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές 3 cm και 5 cm. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το ορθογώνιο χωρίζεται σε 15 «τετραγωνάκια» εμβαδού 1 cm^2 . Επομένως, το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2$.

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές α , β ισούται με $\alpha \cdot \beta$.

Τις πλευρές ενός ορθογωνίου τις λέμε μήκος (τη μεγαλύτερη πλευρά) και πλάτος (τη μικρότερη) και τις ονομάζουμε διαστάσεις του ορθογωνίου. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το γινόμενο των διαστάσεων

ενός ορθογωνίου ισούται με το
εμβαδόν του ή:

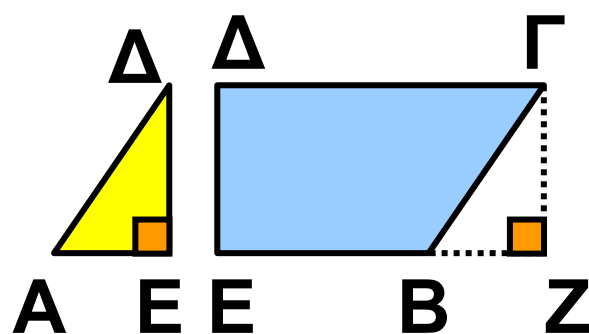
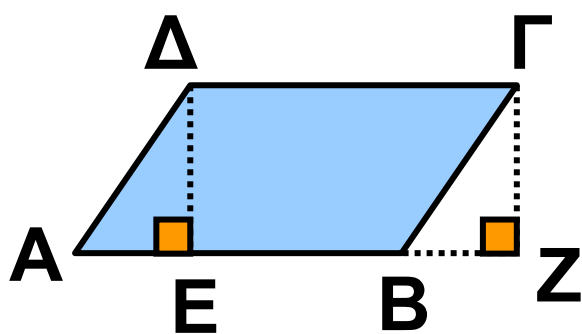
$$\begin{aligned} \text{εμβαδόν ορθογωνίου} &= \\ &= \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

*Για να συμβολίσουμε το εμβαδόν
κάθε επίπεδου σχήματος, το γρά-
φουμε μέσα σε παρένθεση. Δηλαδή,
το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου
ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ), το
εμβαδόν ενός τριγώνου ΖΗΘ
συμβολίζεται με (ΖΗΘ) κ.ο.κ.*

Εμβαδόν παραλληλογράμμου

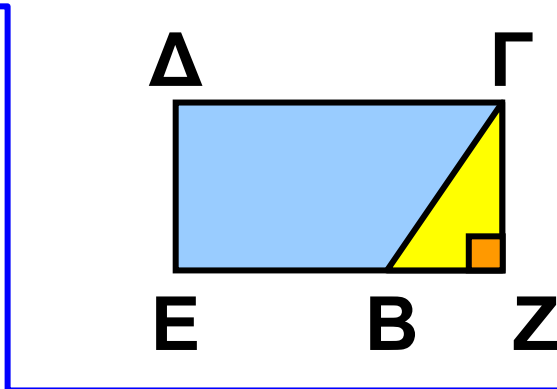
Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλό-
γραμμο ΑΒΓΔ με βάση ΑΒ = β = ΓΔ
και ας φέρουμε τα ύψη του ΔΕ = υ
και ΓΖ = υ. Μεταφέροντας το τρίγω-
νο ΑΔΕ στη θέση τού (ίσου με αυτό)
τριγώνου ΒΓΖ, παρατηρούμε ότι: το
εμβαδόν του παραλληλογράμμου



ΑΒΓΔ ισούται με
το εμβαδόν του
ορθογωνίου ΕΖΓΔ.

Άρα:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΕΖΓΔ) = ΕΖ \cdot ΓΖ = \beta \cdot \upsilon.$$

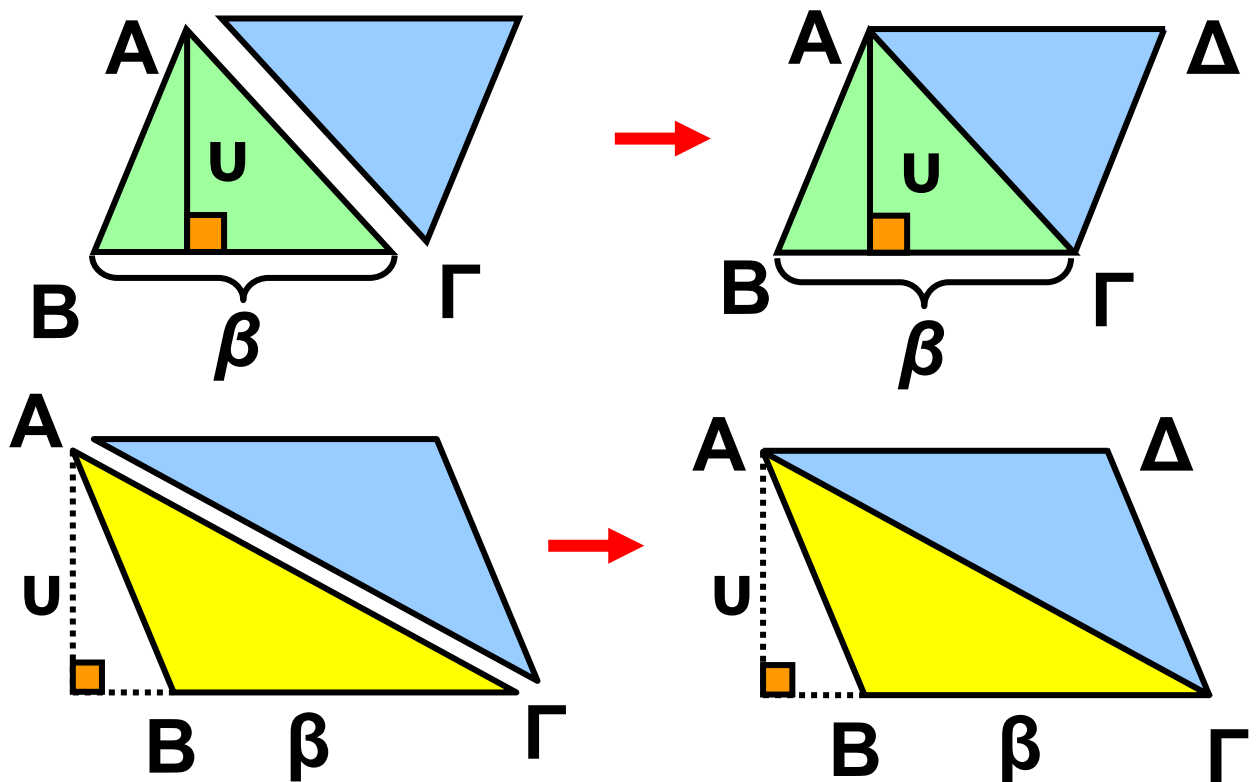


Γενικά:

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

Εμβαδόν τυχαίου τριγώνου

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ που δεν είναι ορθογώνιο και ας πάρουμε και άλλο ένα τρίγωνο ίδιο με αυτό. Αν τοποθετήσουμε το δεύτερο τρίγωνο δίπλα στο πρώτο,



όπως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα, τότε θα σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, που θα έχει ως βάση β , τη βάση $B\Gamma$ του $AB\Gamma$ και ως ύψος u , το ύψος του $AB\Gamma$, από την κορυφή A . Είτε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο είτε είναι αμβλυγώνιο, το εμβαδόν του θα είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ που σχηματίζεται, αν τοποθετήσουμε άλλο ένα τρίγωνο ίσο με το $AB\Gamma$, όπως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα.

Επομένως, θα ισχύει:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} (ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon,$$

όπου β η βάση του ΑΒΓ και υ το αντίστοιχο ύψος.

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου

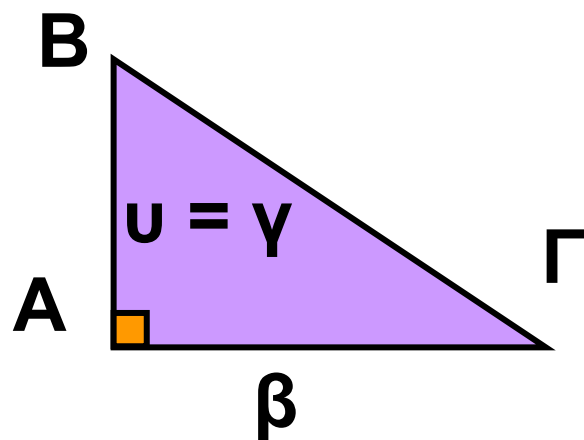
Όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, τότε η μία από τις κάθετες

πλευρές είναι

η βάση β

και η άλλη

το ύψος του.



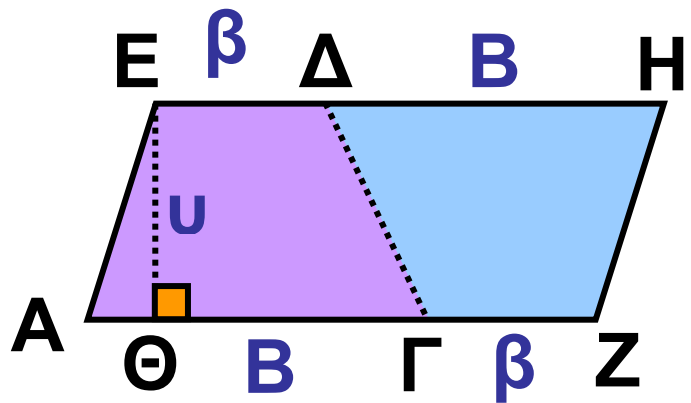
Επομένως:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma.$$

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.

Εμβαδόν τραπέζιου

Ας θεωρήσουμε το τραπέζιο ΑΓΔΕ που έχει μεγάλη βάση ΑΓ = Β,



μικρή βάση ΕΔ = β και ύψος ΕΘ = υ.

Θεωρώντας άλλο ένα ίσο τραπέζιο με το ΑΓΔΕ σχηματίζουμε ένα

παραλληλόγραμμο ΑΖΗΕ, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Το

παραλληλόγραμμο που σχηματίσαμε έχει βάση (β + Β) και ύψος υ.

Επομένως: $(ΑΖΗΕ) = (β + Β) \cdot υ$.

Όμως: $(ΑΖΗΕ) = 2(ΑΓΔΕ)$

$$\text{Άρα: } (ΑΓΔΕ) = \frac{(β + Β)υ}{2}$$

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του με το ύψος του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μήκος ορθο- γωνίου	Πλάτος ορθο- γωνίου	Περίμετρος ορθο- γωνίου	Εμβαδόν ορθο- γωνίου
12 m	10 m		
17 m		44 m	
	9 m		45 m ²
33 m			330 m ²

Λύση: Με τη βοήθεια της σχέσης:
εμβαδόν ορθογωνίου =
= μήκος · πλάτος, συμπληρώνουμε
τον πίνακα:

38 / 120-121

Μήκος ορθο- γωνίου	Πλάτος ορθο- γωνίου	Περίμετρος ορθο- γωνίου	Εμβαδόν ορθο- γωνίου
12 m	10 m	44 m	120 m ²
17 m	5 m	44 m	85 m ²
5 m	9 m	28 m	45 m ²
33 m	10 m	86 m	330 m ²

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η αίθουσα Φυσικής στο σχολείο της Άννας αποφασίστηκε να στρωθεί με τετράγωνα πλακάκια που το καθένα έχει πλευρά 25 cm.

α) Να βρείτε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν, αν το δάπεδο της τάξης έχει διαστάσεις 12 m μήκος και 8 m πλάτος.

β) Αν κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, πόσα χρήματα θα χρειαστούν για να στρωθεί η τάξη;

Λύση: α) Το εμβαδόν του δαπέδου είναι: $E_{\Delta\Lambda\text{Π}} = 12 \cdot 8 = 96 \text{ (m}^2\text{)}$ και το εμβαδόν σε κάθε πλακάκι είναι:
 $E_{\text{ΠΛΑΚ}} = 25 \cdot 25 = 625 \text{ (cm}^2\text{)} =$
 $= 0,0625 \text{ (m}^2\text{)}.$

Διαιρώντας τα δύο αυτά εμβαδά βρίσκουμε πόσα πλακάκια χρειάζονται για να στρωθεί η τάξη:

$$\frac{E_{\Delta\Lambda\text{Π}}}{E_{\text{ΠΛΑΚ}}} = \frac{96}{0,0625} = 1536.$$

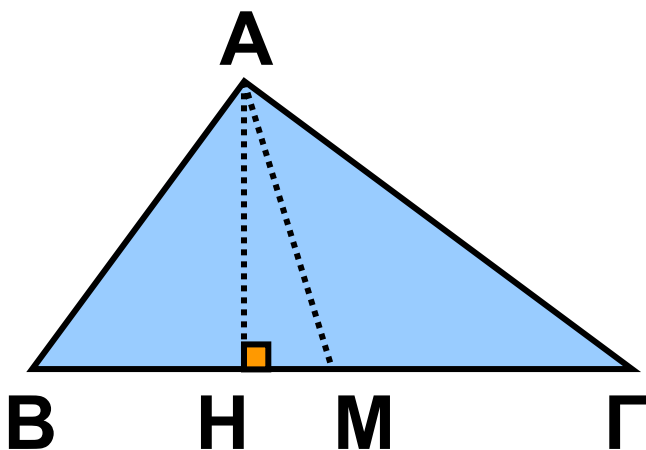
β) Αφού χρειάζονται 1536 πλακάκια και το κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, το συνολικό κόστος θα είναι: $1536 \cdot 0,5 = 768 \text{ €}.$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο σχολείο της Κάτιας το μαθητικό συμβούλιο εκδίδει μια εφημερίδα που κάθε φύλλο της έχει διαστάσεις 42 cm μήκος και 30 cm πλάτος. Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα της εφημερίδας, αν κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα.

Λύση: Το εμβαδόν κάθε φύλλου είναι $30 \cdot 42 = 1260 \text{ (cm}^2\text{)}$. Αφού κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα, χρειάζονται $8 \cdot 1260 = 10080 \text{ (cm}^2\text{)}$ χαρτί για κάθε αντίτυπο. Επομένως, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα, θα χρειαστούν:
 $800 \cdot 10080 = 8064000 \text{ (cm}^2\text{)} =$
 $= 806,4 \text{ (m}^2\text{)} \text{ χαρτί.}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4



Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος φέρνουμε τη διάμεσο AM . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MAB και MAG έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Λύση: Φέρνουμε το ύψος AH . Τότε το τρίγωνο MAB έχει εμβαδόν:

$$(MAB) = \frac{BM \cdot AH}{2}.$$

Το τρίγωνο MAG έχει εμβαδόν:

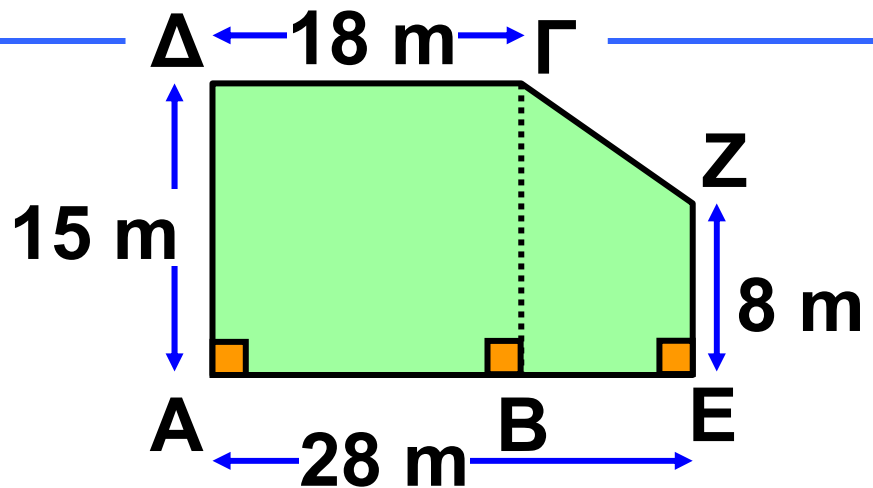
$$(MAG) = \frac{BG \cdot AH}{2}. \text{ Όμως, } MB = MG,$$

επειδή το M είναι το μέσο της $B\Gamma$ (η AM είναι διάμεσος).

Άρα: $(MAB) = (MAG)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Ένα οικοπέδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, πωλείται προς 300 € το m^2 . Ποια είναι η αξία του οικοπέδου;



Λύση:

Βρίσκουμε
πρώτα

το εμβαδόν του οικοπέδου. Αυτό αποτελείται από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το τραπέζιο ΒΕΖΓ.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:
 $(ΑΒΓΔ) = 18 \cdot 15 = 270 (m^2)$.

Το εμβαδόν του τραπέζιου είναι:

$$(ΒΕΖΓ) = \frac{(15 + 8) \cdot 10}{2} = 115 (m^2).$$

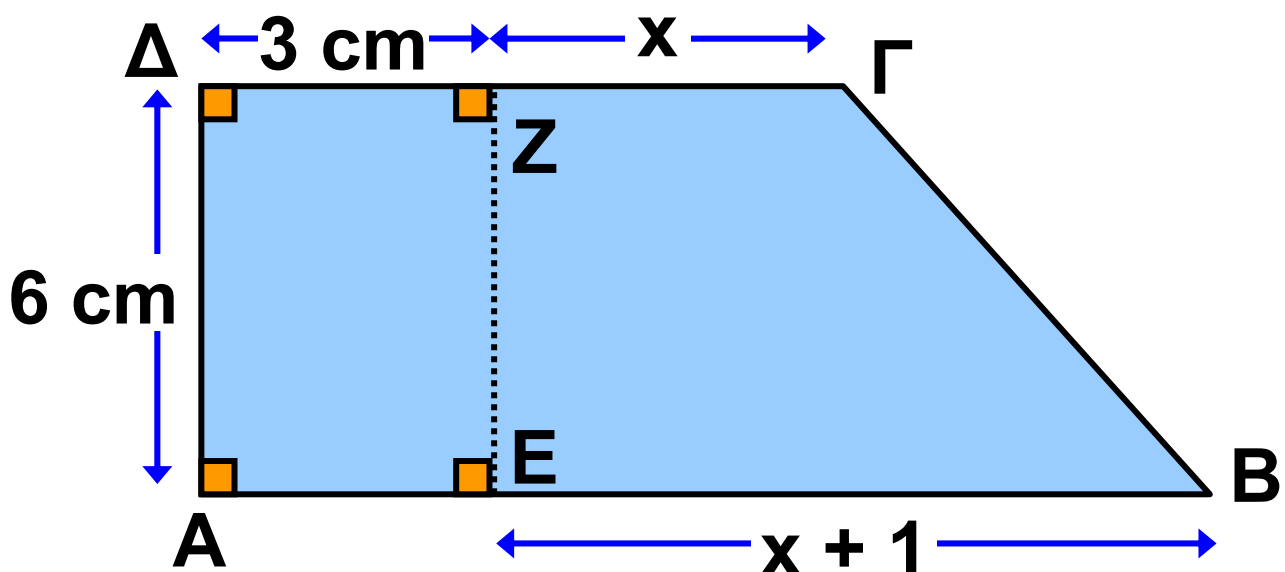
Άρα, το εμβαδόν του οικοπέδου είναι $270 + 115 = 385 (m^2)$.

Για να βρούμε την αξία πώλησης του οικοπέδου, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν του με την τιμή πώλησης του τετραγωνικού μέτρου. Άρα, η αξία του οικοπέδου είναι: $385 \cdot 300 = 115.500 \text{ €}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Στο παρακάτω σχήμα:

- α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του x .
- β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι το τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου $AEZ\Delta$, να υπολογίσετε το x .



Λύση: α) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μικρή βάση είναι $\Delta\Gamma = x + 3$ (cm), η μεγάλη βάση είναι $AB = x + 1 + 3 = x + 4$ (cm) και το ύψος του είναι $\Delta A = 6$ (cm). Άρα, το εμβαδόν του

$$\begin{aligned} \text{είναι: } (AB\Gamma\Delta) &= \frac{(\beta + B) \cdot u}{2} = \\ &= \frac{(x + 3 + x + 4) \cdot 6}{2} = 3(2x + 7) \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $(AEZ\Delta) = 3 \cdot 6 = 18$ (cm²).

Αφού το εμβαδόν του τραπεζίου είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου, έχουμε:

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta) &= 3 \cdot (AEZ\Delta) \text{ ή } 3(2x + 7) = \\ &= 3 \cdot 18 \end{aligned}$$

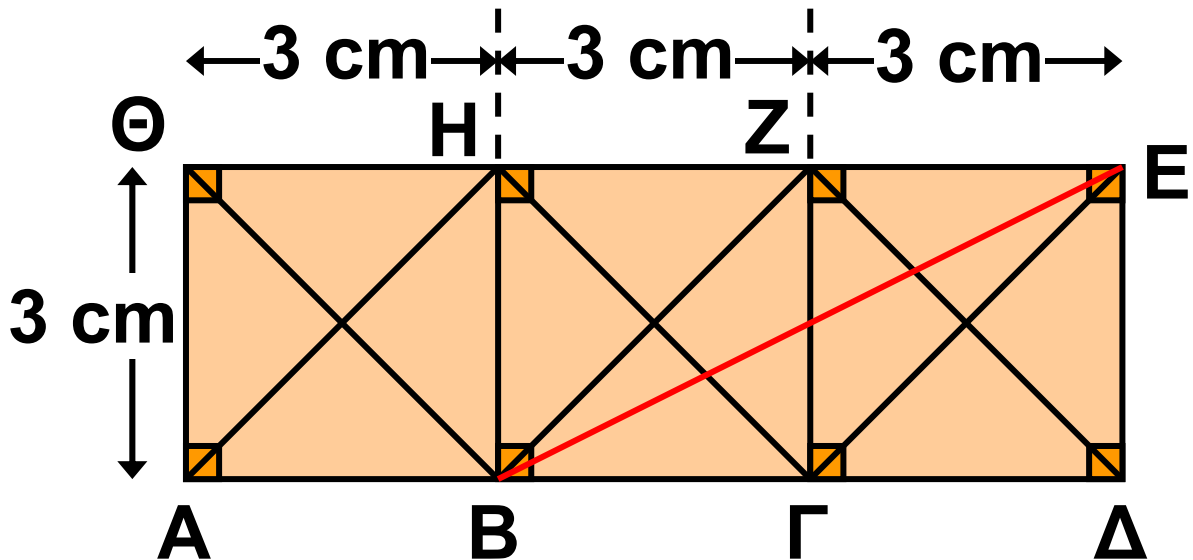
Δηλαδή:

$$2x + 7 = 18 \text{ ή } 2x = 11 \text{ ή } x = 5,5 \text{ (cm).}$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα:

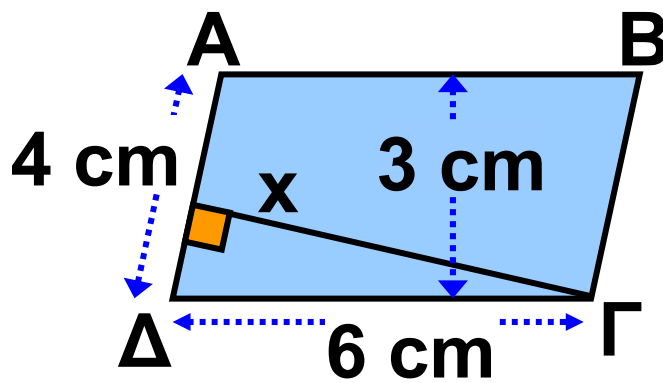


		A	B	Γ
1	Το εμβαδόν του ABHΘ είναι:	3	6	9
2	Το εμβαδόν του ΑΓΖΘ είναι:	6	12	18
3	Το εμβαδόν του ΑΓΕΗ είναι:	12	18	21
4	Το εμβαδόν του ΑΗΓ είναι:	9	12	4,5
5	Το εμβαδόν του ΒΖΗ είναι:	9	12	4,5

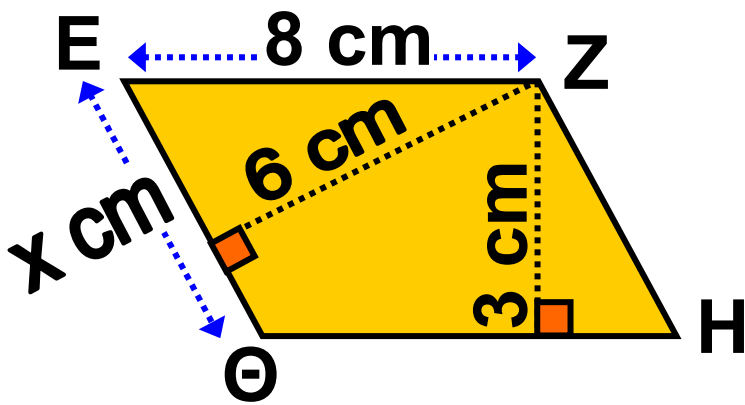
		A	B	Γ
6	Το εμβαδόν του ΑΔΖΗ είναι:	12	18	21
7	Το εμβαδόν του ΑΔΕΗ είναι:	22,5	18	27
8	Το εμβαδόν του ΑΒΕΘ είναι:	22,5	18	21

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

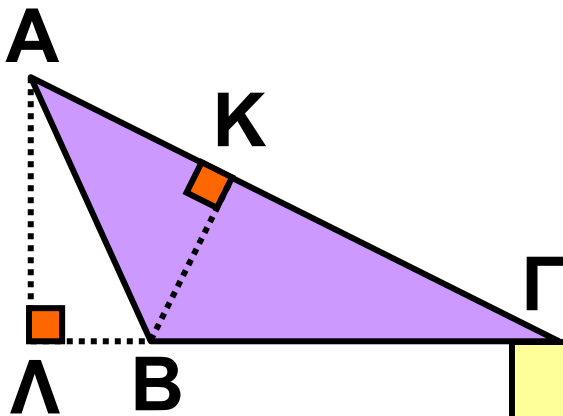
2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:



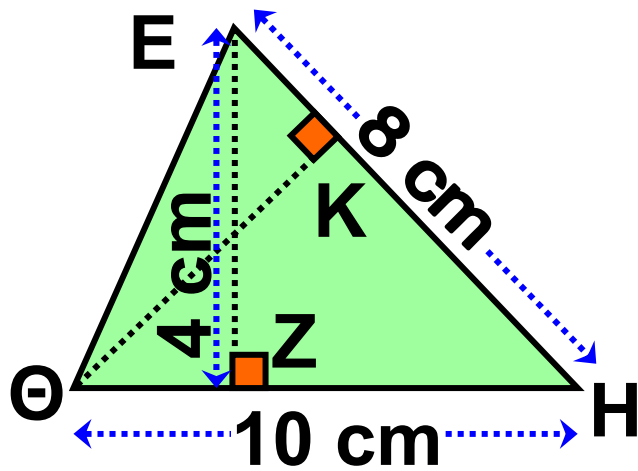
		A	B	Γ
1	Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:	24	9	18
2	Το ύψος x που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΔ είναι:	5,5	9	4,5



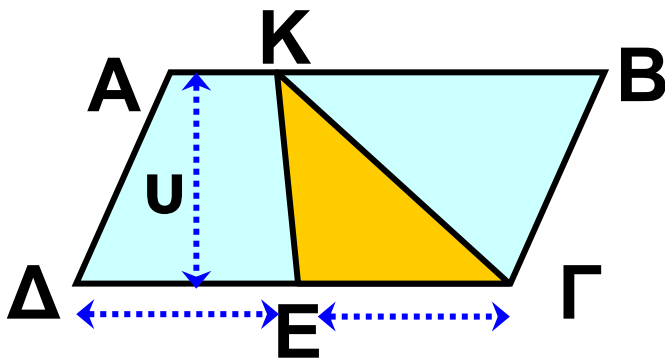
		A	B	Γ
3	Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου EZHΘ είναι:	24	12	32
4	Η πλευρά $x = EΘ$ είναι:	4	6	5



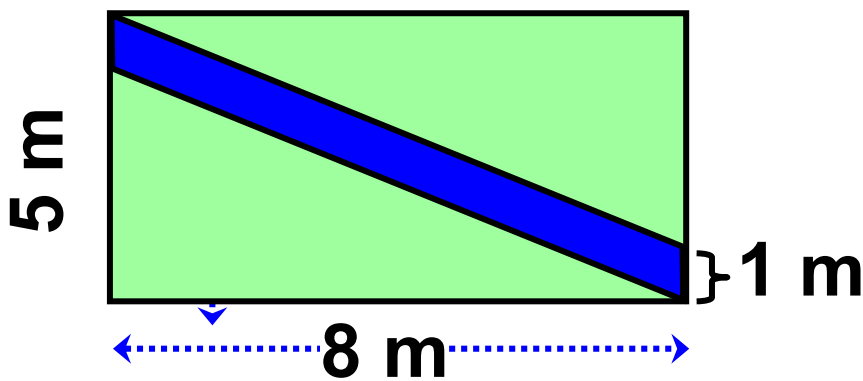
		A	B	Γ
5	Ποιο από τα επόμενα δεν είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ;	$\frac{AB \cdot AG}{2}$	$\frac{AG \cdot BK}{2}$	$\frac{BG \cdot AL}{2}$



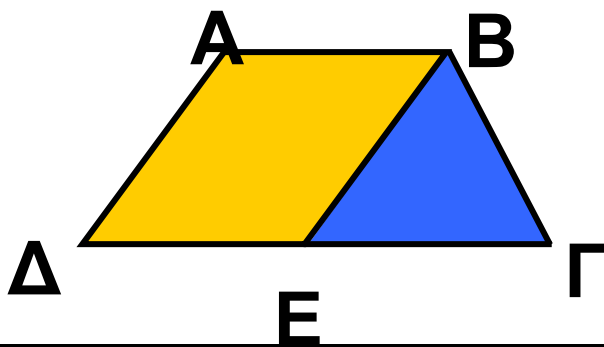
		A	B	Γ
6	Το εμβαδόν του τριγώνου ΕΘΗ είναι:	24	12	32
7	Το ύψος ΘΚ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΕΗ είναι:	4	6	5



		A	B	Γ
8	Το παραπάνω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν 16 cm^2 και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΕΓ είναι:	4	6	8



		A	B	Γ
9	Το εμβαδόν του μπλε παραλληλογράμμου είναι:	5	4	8
10	Το εμβαδόν κάθε πράσινου τριγώνου είναι:	16	20	17,5



		A	B	Γ
8	Αν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ είναι 12 cm^2 και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, τότε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι:	24	16	18

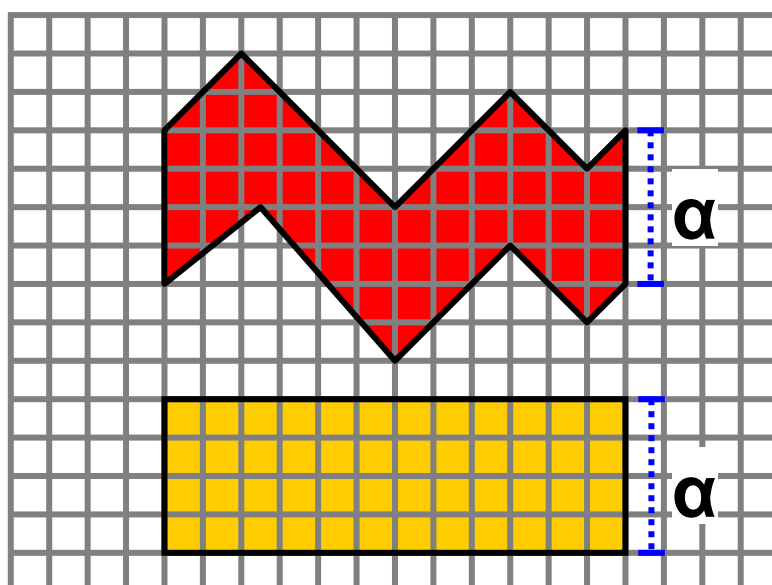
ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1 Αν η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 60 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

2 Οι διαστάσεις ενός φύλλου στο εικοσάφυλλο τετράδιο του Σταύρου είναι 21 cm και 30 cm. Να υπολογίσετε πόση επιφάνεια χαρτιού έχει όλο το τετράδιο.

3 Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα εμβαδά του ροζ και του κίτρινου σχήματος είναι ίσα.

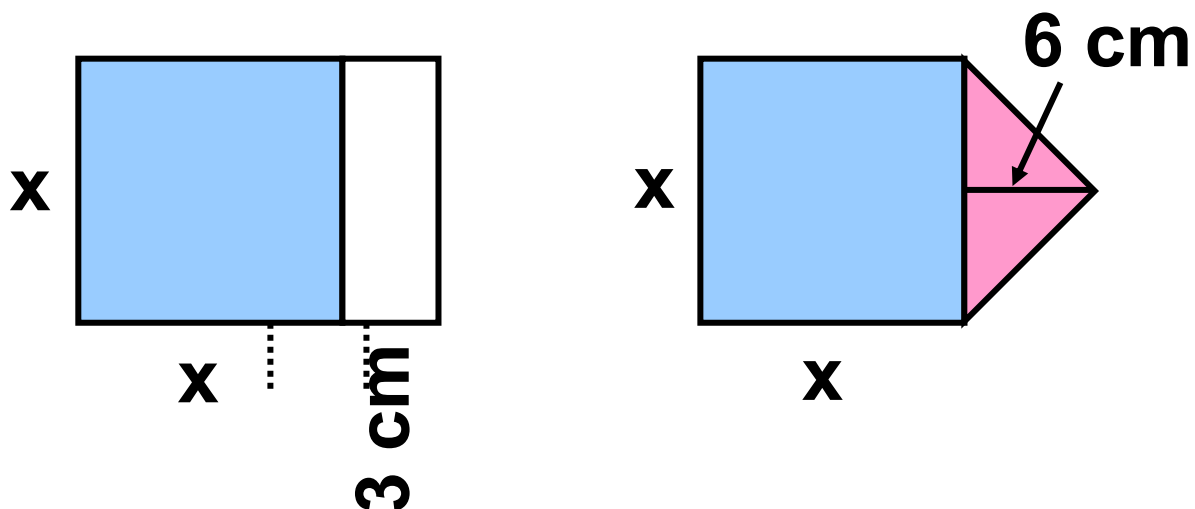


4 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Στη συνέχεια να προεκτείνετε την πλευρά $ΑΒ$ του τετραγώνου και να πάρετε τμήμα $ΒΕ = ΑΒ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και το τρίγωνο $ΑΕΔ$ έχουν ίσα εμβαδά.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $ΑΕΔ$ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του $ΒΓΕ$.

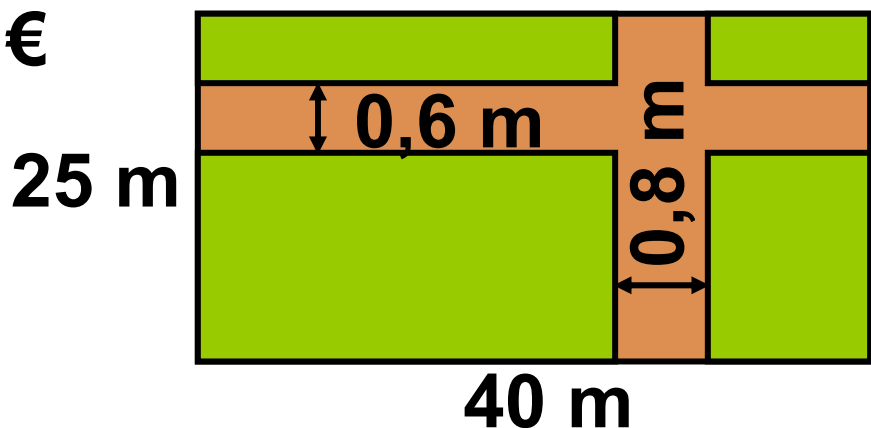
5 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο σχημάτων στο παρακάτω σχήμα, αν $x = 5 \text{ cm}$. Στη συνέχεια, να εξηγήσετε γιατί αυτά είναι ίσα για οποιαδήποτε τιμή του x .



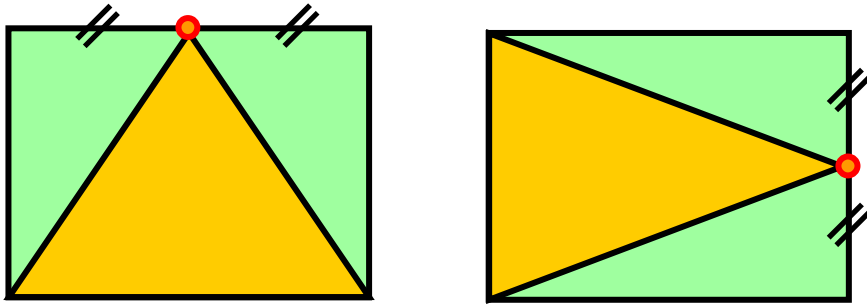
6 Ένα τετράγωνο και ένα τραπέζιο έχουν ίσα εμβαδά. Αν οι βάσεις του τραπεζίου είναι 12 cm και 20 cm και το ύψος του είναι 4 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

7 Ένας ορθογώνιος κήπος έχει διαστάσεις 40 m και 25 m. Τον κήπο διασχίζουν δύο κάθετα μεταξύ τους δρομάκια. Το ένα παράλληλο προς τη μεγάλη πλευρά του κήπου με πλάτος 0,6 m και το άλλο με πλάτος 0,8 m. Το υπόλοιπο τμήμα θα φυτευτεί με γκαζόν. Να υπολογίσετε το κόστος της κατασκευής του γκαζόν, αν ο γεωπόνος

χρεώνει 12 €
κάθε m^2
γκαζόν.

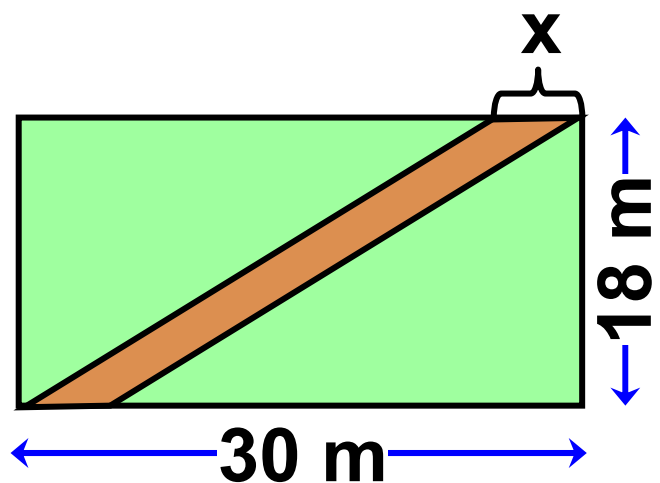


8 Τα παρακάτω ορθογώνια έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Εξηγήστε γιατί τα πράσινα μέρη των δύο ορθογωνίων έχουν ίσα εμβαδά.



9 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου, το οποίο διασχίζει διαγώνια ένας δρόμος σταθερού πλάτους.

α) Να αποδείξετε ότι τα τριγωνικά οικόπεδα που απομένουν έχουν ίσα εμβαδά.

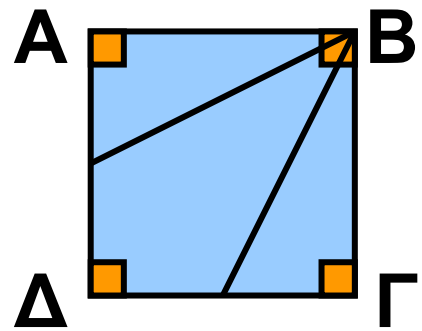


β) Να υπολογίσετε το x , ώστε ο δρόμος να «αποκόπτει» από το οικόπεδο τμήμα του οποίου το εμβαδόν

να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού που απομένει στο οικόπεδο.

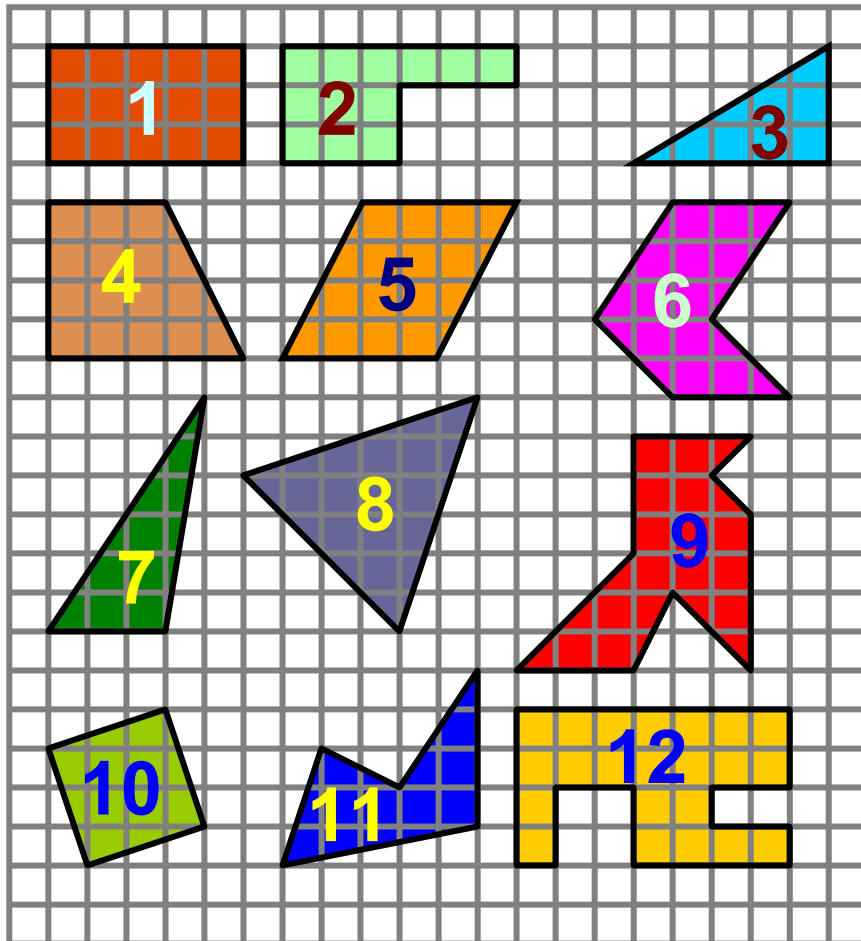
10 Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι Μ και Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΔΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΝΓΒ έχουν ίσα εμβαδά.

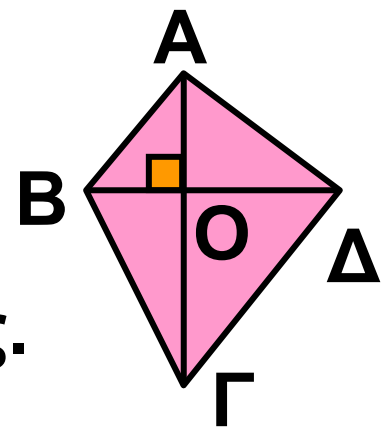


β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΜΔΝ έχει εμβαδόν όσο είναι το άθροισμα των εμβαδών των παραπάνω τριγώνων.

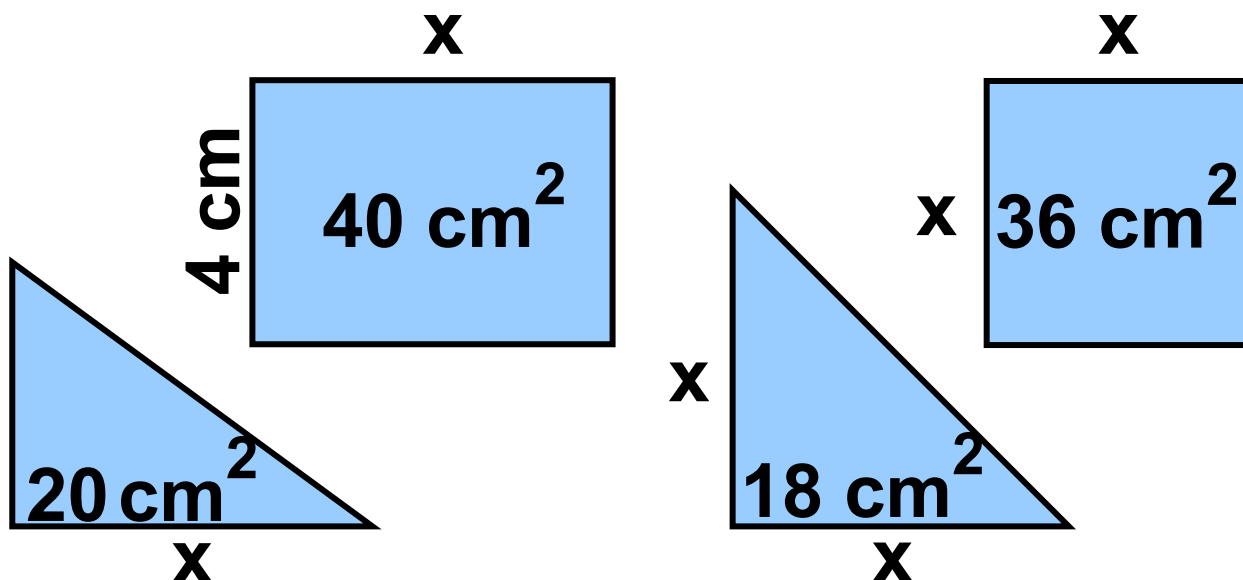
11 Στα παρακάτω σχήματα κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm. Να βρείτε τα εμβαδά των 12 σχημάτων που δίνονται:



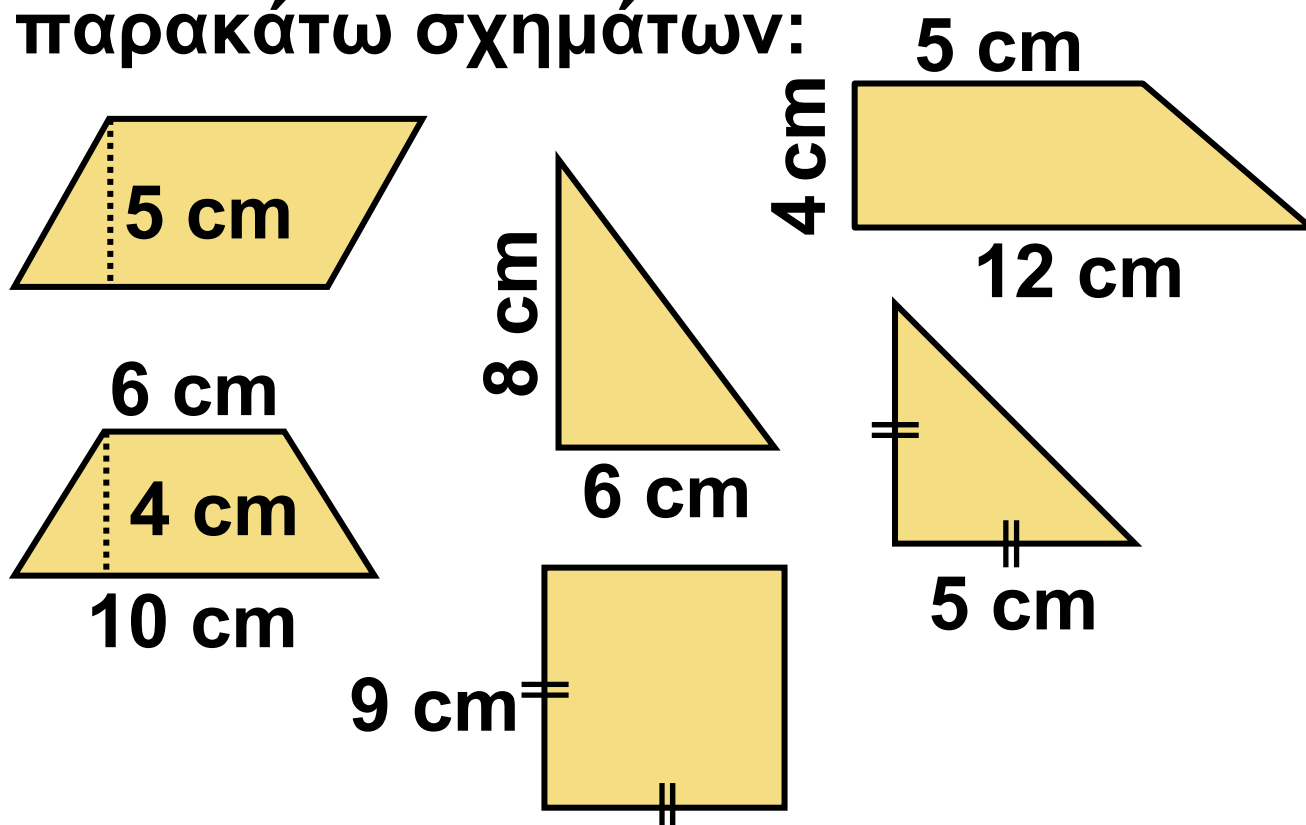
12 Στο τετράπλευρο του διπλανού σχήματος οι διαγώνιες είναι κάθετες. Αν $B\Delta = 5 \text{ cm}$, $OA = 3 \text{ cm}$ και $O\Gamma = 6 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου.



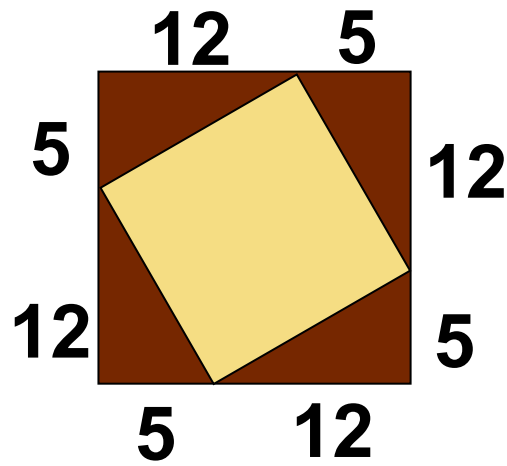
13 Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.



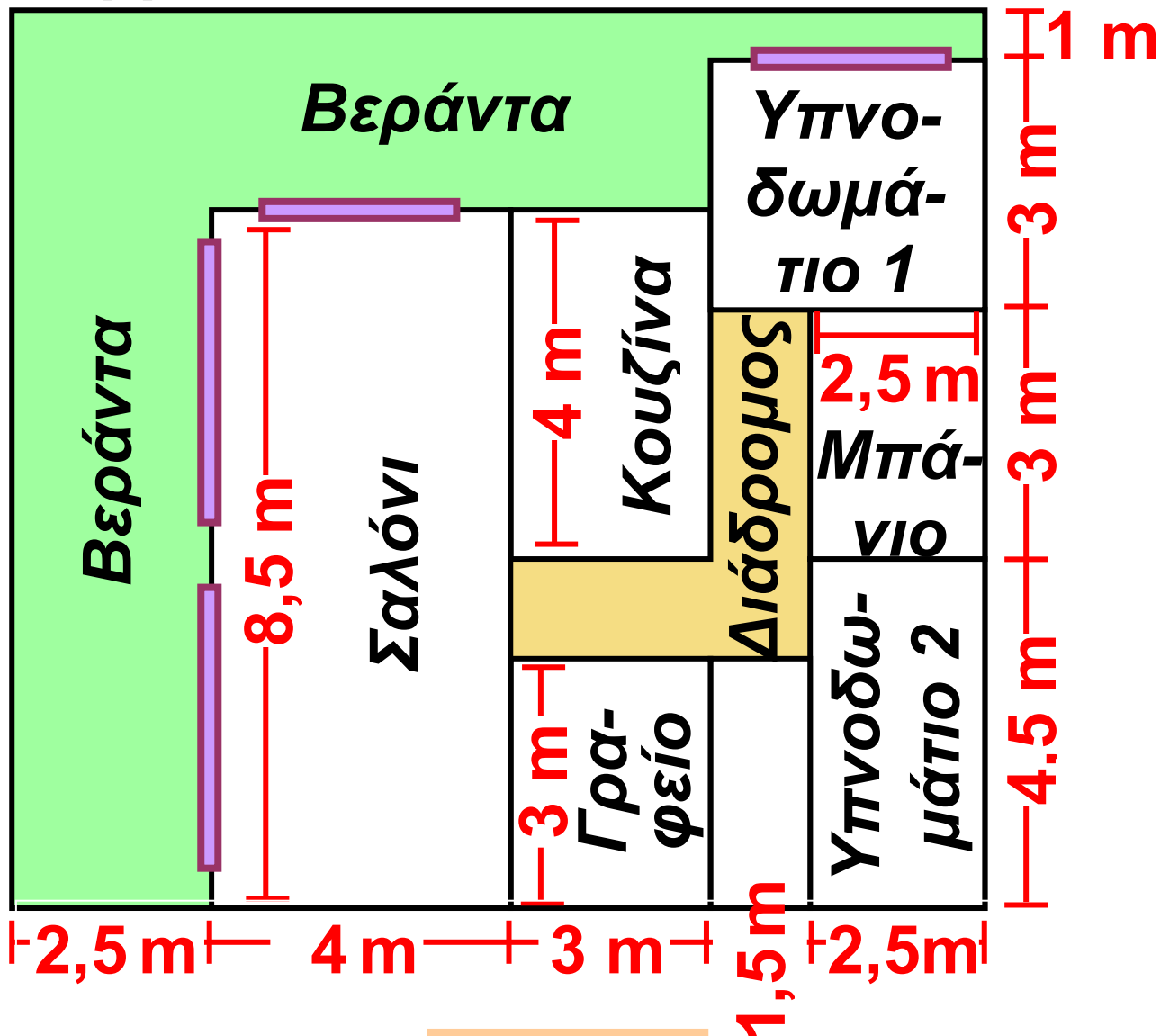
14 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:



15 Να βρείτε το εμβαδόν του πορτοκαλί τετραγώνου του παρακάτω σχήματος.



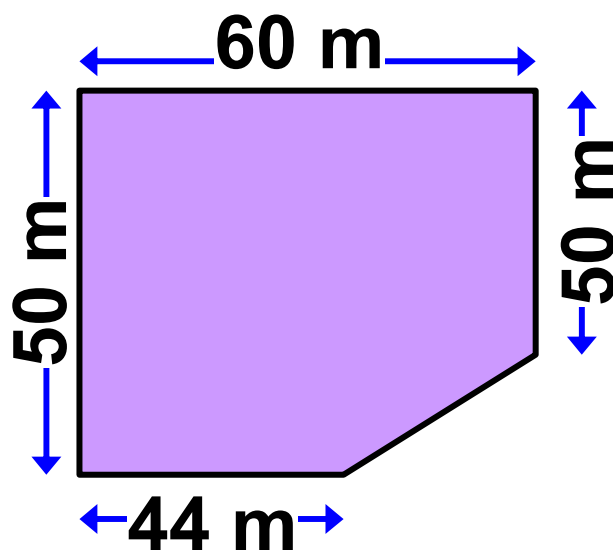
16 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η κάτοψη ενός διαμερίσματος. Να βρείτε:



- α) Το εμβαδόν κάθε δωματίου.
- β) Το εμβαδόν του γωνιακού διαδρόμου.
- γ) Το εμβαδόν της βεράντας.

17 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος το οποίο πωλείται προς 20.000 € το στρέμμα.

- α) Να βρεθεί η αξία του κτήματος.
- β) Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό, αν κάθε κλήμα απαιτεί $2,5 \text{ m}^2$ χώρο;



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:



Πίσω από την κουρτίνα κρύβονται ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο.



Βρείτε τη θέση και το εμβαδόν καθενός, αν γνωρίζετε ότι:

- 1. Το ορθογώνιο έχει τετραπλάσιο εμβαδόν και βρίσκεται πιο αριστερά από το τετράγωνο.**
- 2. Ένα σχήμα εμβαδού 100 cm^2 βρίσκεται δεξιά από το ορθογώνιο τρίγωνο.**
- 3. Δεξιά από ένα σχήμα με τέσσερις ορθές γωνίες βρίσκεται το ορθογώνιο τρίγωνο.**
- 4. Οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου.**

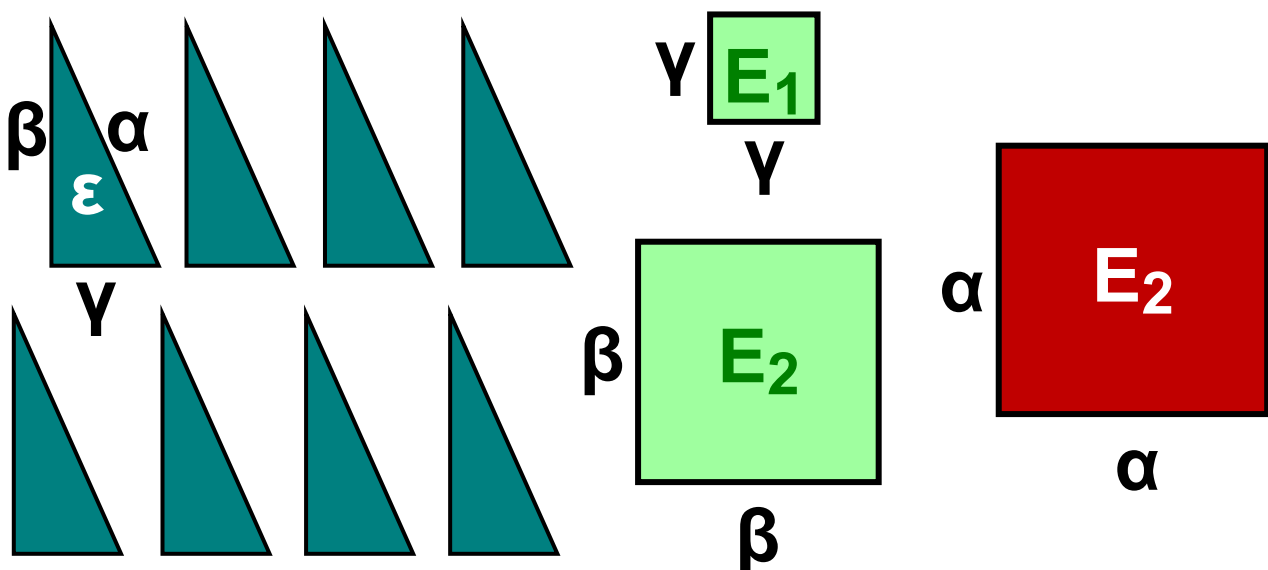
1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β , γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α , β , γ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε , E , E_1 , E_2 των διπλανών τριγώνων και τετραγώνων.

β) Να τοποθετήσετε κατάλληλα τα τρίγωνα και τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν δύο νέα τετράγωνα, πλευράς $(\beta + \gamma)$.



Λύση

α) Έχουμε ότι: $\varepsilon = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}$

$$E = \alpha^2$$

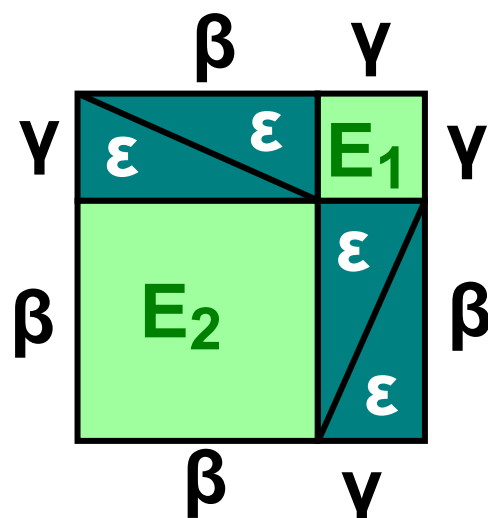
$$E_1 = \gamma^2$$

$$E_2 = \beta^2 \quad \gamma$$

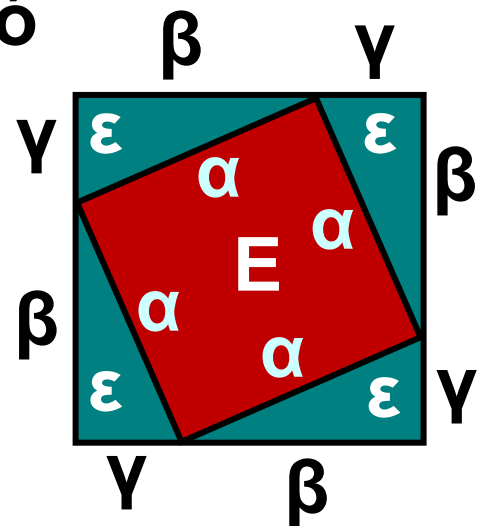
β) Αρκεί να τα τοποθετήσουμε όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το εμβαδόν των ίσων τετραγώνων πλευράς $(\beta + \gamma)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1ος τρόπος: $E_1 + E_2 + 4\varepsilon$ από το πρώτο τετράγωνο που αποτελείται από 4 τρίγωνα και τα δύο

τετράγωνα πλευράς β, γ αντίστοιχα.



2ος τρόπος: $E + 4\varepsilon$ από το δεύτερο τετράγωνο που αποτελείται πάλι από 4 τρίγωνα και το τετράγωνο πλευράς α .



Επομένως, θα ισχύει ότι:

$$E_1 + E_2 + 4\varepsilon = E + 4\varepsilon \quad \text{ή}$$

$$E_1 + E_2 = E \quad \text{ή}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

Η σχέση αυτή, που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το **Πυθαγόρειο θεώρημα**, δηλαδή ισχύει:

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

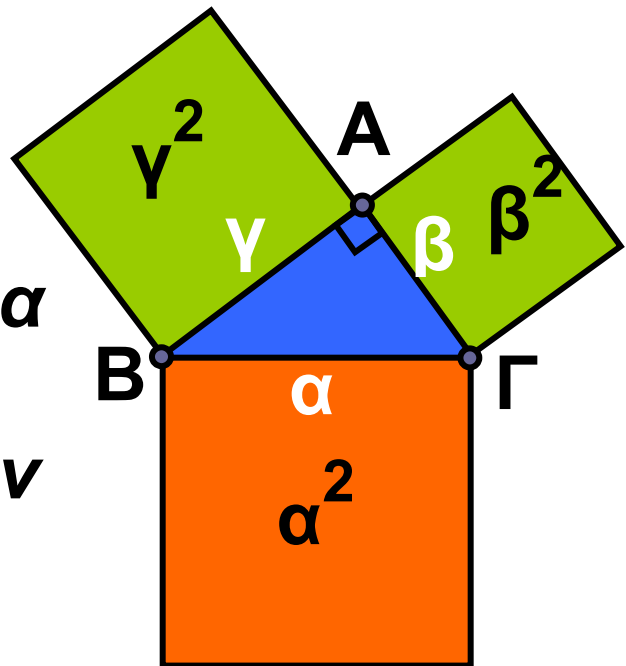
Παρατήρηση:

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A .

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, δηλαδή το εμβαδόν

του μεγάλου πορτοκαλί τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πράσινων τετραγώνων.

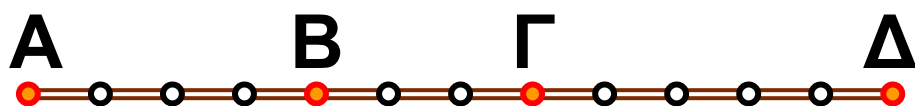


Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

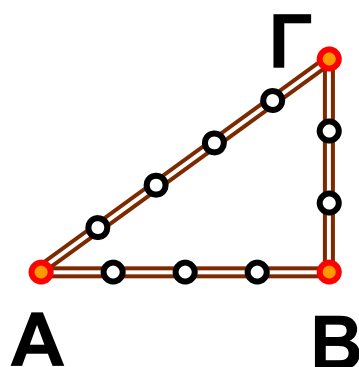


Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν το σκοινί του παρακάτω

σχήματος. Όπως βλέπουμε, το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.



Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντώνοντας το σκοινί στους κόκκινους κόμπους, σχηματίζεται το τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την κορυφή Β.

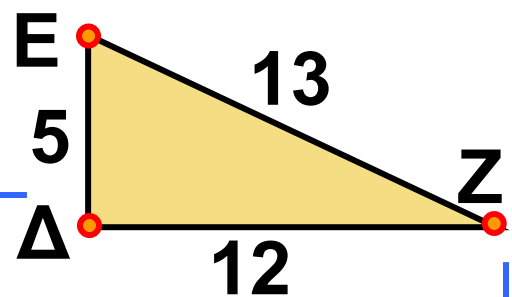


Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την επόμενη γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.



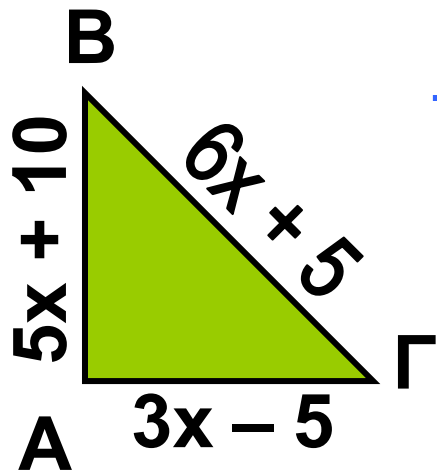
Λύση: Στο τρίγωνο ΔΕΖ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 5 και 12, οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Επιπλέον, η υποτείνουσα έχει μήκος 13 και το τετράγωνό της ισούται με: $13^2 = 169$. Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει περίμετρο 150 m .

α) Να βρείτε τον αριθμό x .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



Λύση: α) Η περίμετρος του τριγώνου είναι: $AB + B\Gamma + \Gamma A =$
 $= 5x + 10 + 6x + 5 + 3x - 5 = 14x + 10$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:

$$14x + 10 = 150 \quad \text{ή} \quad 14x = 150 - 10 \quad \text{ή}$$

$$14x = 140 \quad \text{ή} \quad x = \frac{140}{14}.$$

Άρα $x = 10$.

β) Για $x = 10$ τα μήκη των πλευρών (σε μέτρα) είναι:

$$AB = 5 \cdot 10 + 10 = 60,$$

$$A\Gamma = 3 \cdot 10 - 5 = 25,$$

$$B\Gamma = 6 \cdot 10 + 5 = 65.$$

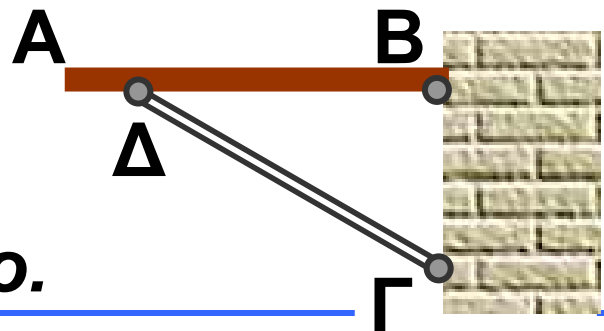
Επομένως: $AB^2 + AG^2 = 60^2 + 25^2 =$
 $= 3600 + 625 = 4225.$

Επίσης: $BΓ^2 = 65^2 = 4225.$

Επομένως: $AB^2 + AG^2 = BΓ^2$ και σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένα ράφι AB είναι στερεωμένο σε ένα κατακόρυφο τοίχο με ένα μεταλλικό στήριγμα μήκους $ΓΔ = 32,6 \text{ cm}$. Αν $BΔ = 27,7 \text{ cm}$ και $BΓ = 17,2 \text{ cm}$, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



Λύση: Το ράφι θα είναι οριζόντιο, μόνο αν είναι κάθετο στον τοίχο, δηλαδή αν το τρίγωνο $BΓΔ$ είναι ορθογώνιο στο B .

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } BD^2 + BG^2 &= 27,7^2 + 17,2^2 = \\ &= 767,29 + 295,84 = 1063,13. \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης: } GD^2 = 32,62^2 = 1062,76.$$

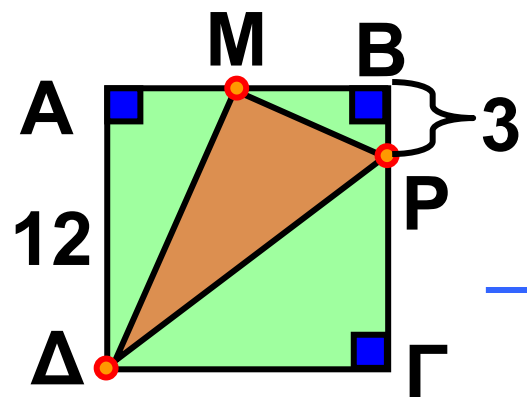
Επομένως: $BD^2 + BG^2 \neq GD^2$, οπότε το τρίγωνο BGD δεν είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $ABGD$ πλευράς 12 cm . Το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς AB και $BP = 3 \text{ cm}$.

α) Να υπολογίσετε τα MD^2 , MP^2 και DP^2 .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MPD είναι ορθογώνιο στο M .



Λύση: α) Αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ, είναι $AM = MB = 6$ (cm).

Επίσης: $ΓΡ = 12 - 3 = 9$ (cm).

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ έχουμε:

$$MD^2 = AD^2 + AM^2 = 12^2 + 6^2 = \\ = 144 + 36 = 180.$$

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΡ έχουμε:

$$MP^2 = MB^2 + BR^2 = \\ = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45, \text{ και στο}$$

ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΡ έχουμε:

$$DP^2 = DG^2 + RP^2 = 12^2 + 9^2 = \\ = 144 + 81 = 225.$$

β) Είναι $MD^2 + MP^2 = 180 + 45 = 225$

$= DP^2$, οπότε σύμφωνα με το

αντίστροφο του Πυθαγόρειου

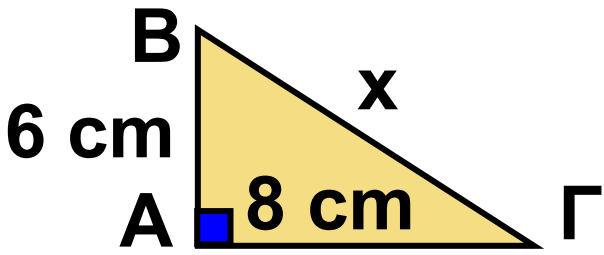
θεωρήματος, το τρίγωνο ΜΡΔ είναι

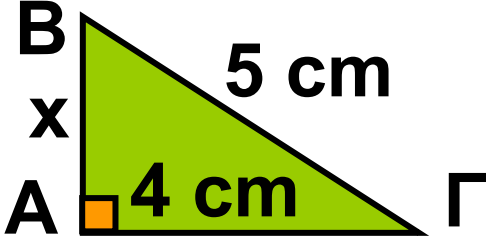
ορθογώνιο στο Μ.

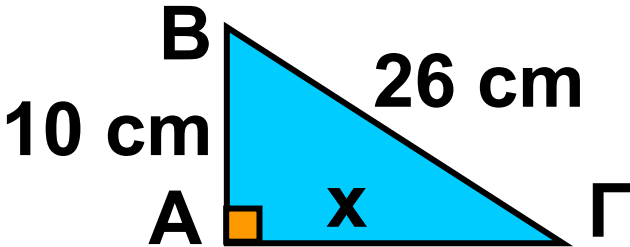


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Στις παρακάτω ερωτήσεις 1 - 4 τα τρίγωνα ΑΒΓ είναι ορθογώνια στο Α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1				
	A	B	Γ	Δ
x =	7 cm	9 cm	10 cm	12 cm

2				
	A	B	Γ	Δ
x =	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm

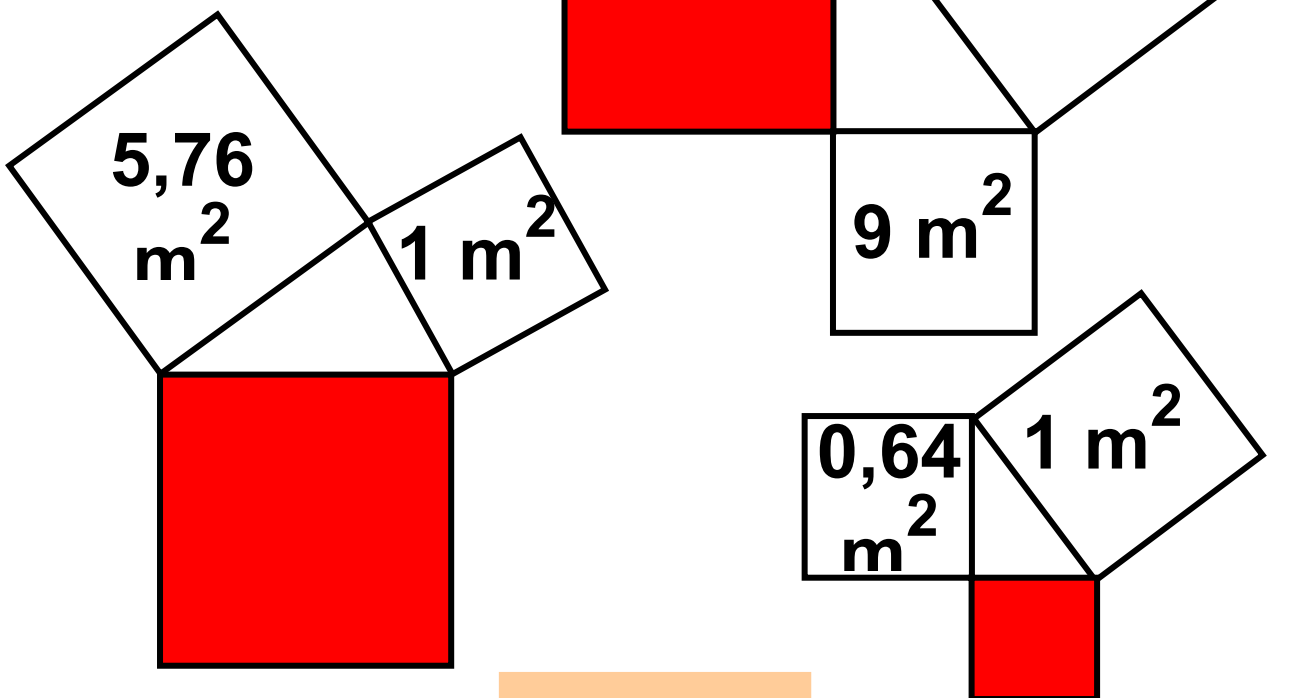
3				
	A	B	Γ	Δ
x =	14 cm	20 cm	24 cm	30 cm

4				
	A	B	Γ	Δ
$\beta =$ και $\gamma =$	$\beta = 15$ και $\gamma = 8$	$\beta = 13$ και $\gamma = 10$	$\beta = 12$ και $\gamma = 13$	$\beta = 8$ και $\gamma = 9$

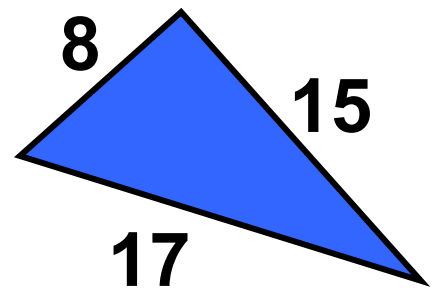
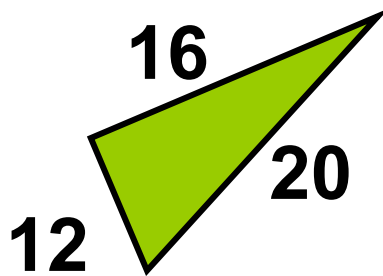
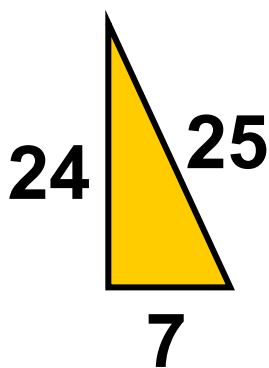
ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1 Να βρείτε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου στα επόμενα σχήματα.



2 Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.

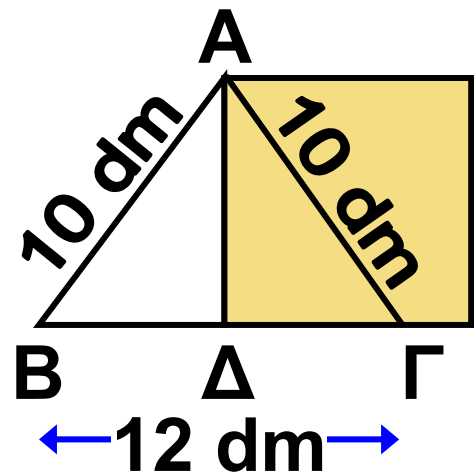


3 α) Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών 6 cm, 8 cm και 10 cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

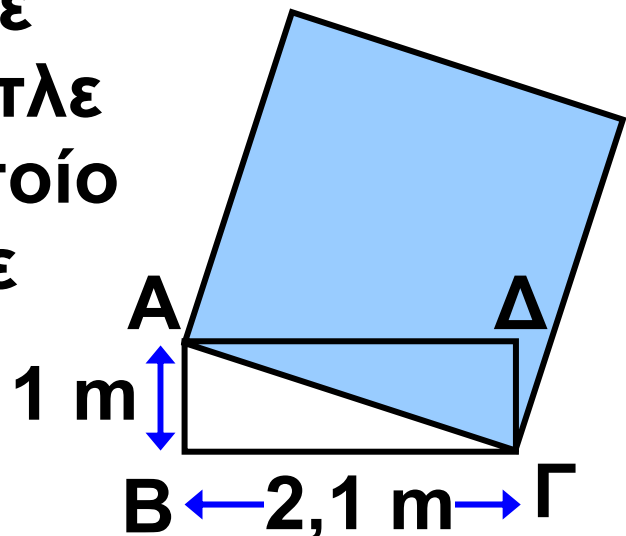
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, καθώς και το τρίγωνο που έχει τις μισές πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, είναι επίσης ορθογώνιο.

4 Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με $AB = AG = 10$ dm και $BG = 12$ dm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του

τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με το ύψος AD του τριγώνου.

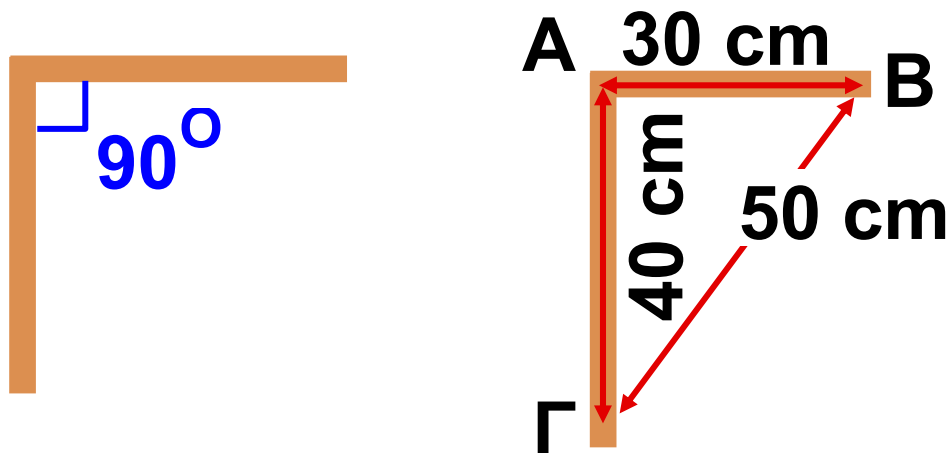


5 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογώνιου $ABΓΔ$.

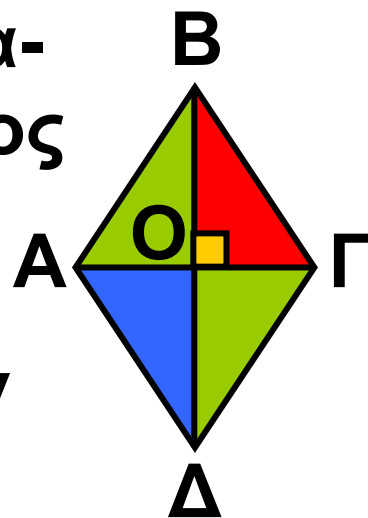


6 Για να σχηματίσει ορθή γωνία με δύο ξύλινα δοκάρια (όπως λέμε για να «γωνιάσει» τα δοκάρια), ένας τεχνίτης μετράει στο ένα δοκάρια $AB = 30$ cm και στο άλλο $AG = 40$ cm. Στη συνέχεια, τα τοποθετεί κατάλληλα, ώστε να είναι $BΓ = 50$ cm. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί είναι

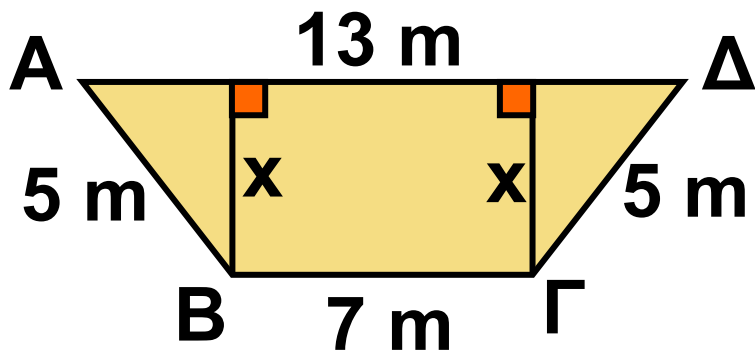
σίγουρος ότι η γωνία που σχηματίζουν τα δοκάρια είναι ορθή;



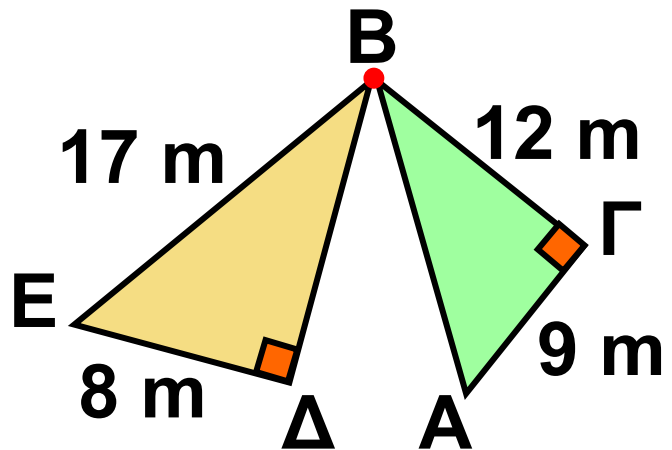
7 Ο χαρταετός του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με διαγώνιες 12 dm και 16 dm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν της επιφάνειας του χαρταετού.



8 Η διατομή ενός καναλιού είναι σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου με πλευρές: $\Gamma\Delta = AB = 5$ m, $B\Gamma = 7$ m και $A\Delta = 13$ m. Να υπολογίσετε το ύψος x του καναλιού.



9 Ποια από τις τοποθεσίες Ε, Δ, Α είναι πλησιέστερα στην πόλη Β;

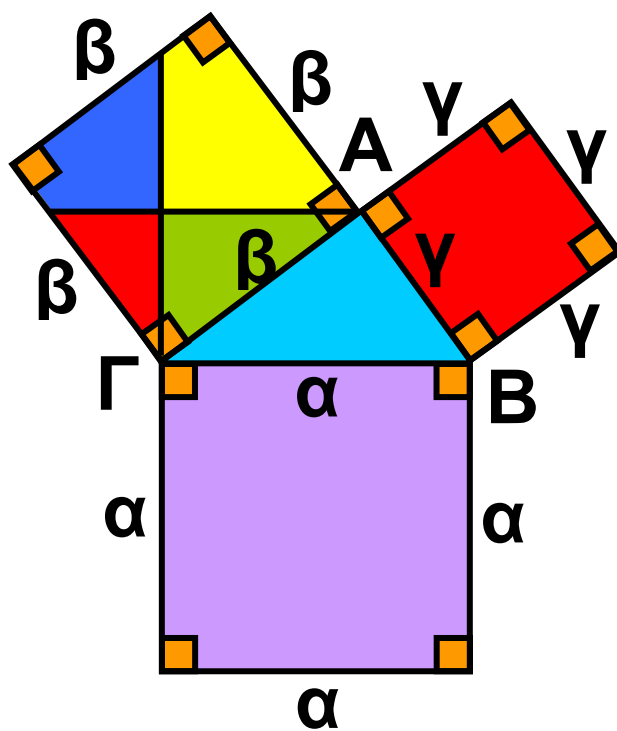


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:



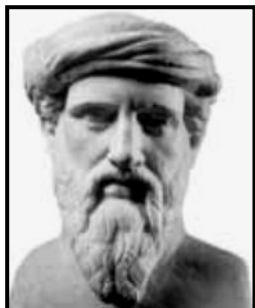
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με μήκος υποτείνουσας a και μήκη κάθετων πλευρών β και γ . Εξωτερικά του τριγώνου έχουμε κατασκευάσει τρία τετράγωνα με μήκη πλευρών a , β και γ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα

χρωματιστά «κομμάτια» που αποτελούν τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών, μπορείτε να «γεμίσετε» το μεγάλο γκρίζο τετράγωνο της υποτεινουσας εφαρμόζοντας ακριβώς τα χρωματιστά κομμάτια χωρίς το ένα να επικαλύπτει το άλλο;



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Πυθαγόρειο θεώρημα




Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα πιο κομψά αλλά ταυτόχρονα και πιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές.

Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον Πυθαγόρα το Σάμιο (585 - 500 π.Χ.), δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε. Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση, οι θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο θεώρημα και όταν το απέδειξε, για να τους ευχαριστήσει, έκανε θυσία

100 βοδιών. Για το λόγο αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως «θεώρημα της εκατόμβης». Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος. Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σ' αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες, όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ Garfield. Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος σ' ένα βιβλίο.

			$1 \text{ m}^2 =$
	$100 \text{ dm}^2 =$	$10.000 \text{ cm}^2 =$	$1.000.000 \text{ mm}^2$
	$1 \text{ dm}^2 =$	$100 \text{ cm}^2 =$	10.000 mm^2
		$1 \text{ cm}^2 =$	100 mm^2

Μονάδες μέτρησης εμβαδών

 Το εμβαδόν μιας επιπέδης επιφάνειας είναι ο θετικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των μονάδων μέτρησης, το οποίο χρειάζεται να πάρουμε, ώστε να καλύψουμε τη δοσμένη επιφάνεια.

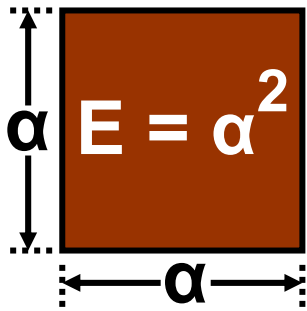
Εμβαδά Επιπέδων Σχημάτων - Πυθαγόρειο Θεώρημα



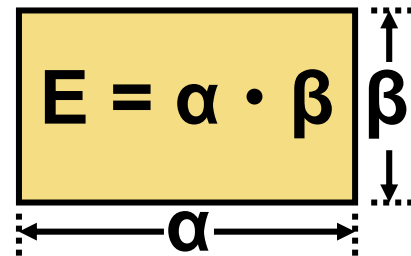
Επανάληψη Κεφαλαίου

 **Εμβαδά των βασικών επίπεδων σχημάτων.**

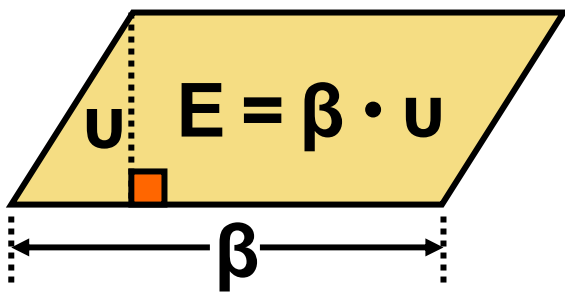
Τετράγωνο



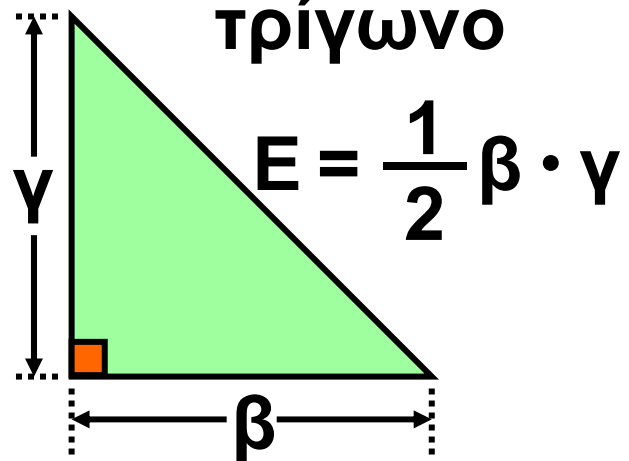
Ορθογώνιο



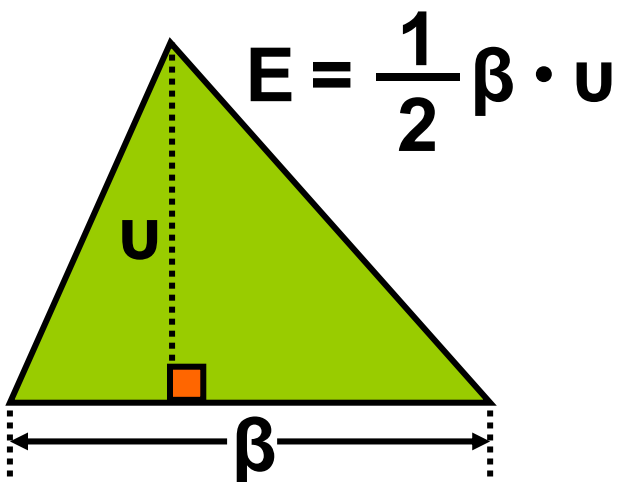
Παραλληλόγραμμο



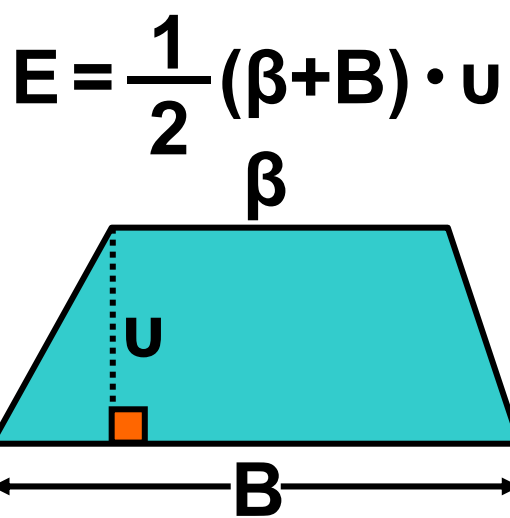
Ορθογώνιο τρίγωνο



Τυχαίο τρίγωνο



Τραπέζιο



 **Πυθαγόρειο θεώρημα:**

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούςας.

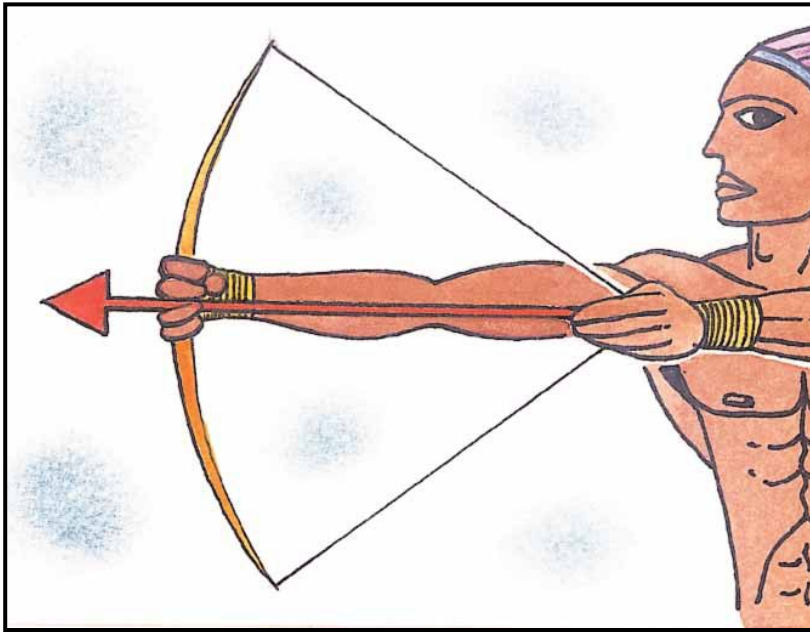
 **Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος**

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Τριγωνομετρία



Διανύσματα

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

- 2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας
- 2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας
- 2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης
- 2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°
- 2.5 Η έννοια του διανύσματος
- 2.6 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων
- 2.7 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Σ το κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ και τα ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

Η Τριγωνομετρία, όπως προδίδει και το όνομά της, ασχολείται με τη μέτρηση των τριγώνων και για την

ακρίβεια με τη μέτρηση των στοιχείων των τριγώνων. Είναι ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε από πολύ παλιά, από τους αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι τη χρησιμοποίησαν με θαυμαστά αποτελέσματα.

Ιδιαίτερα εύστοχη ήταν η εκτίμηση του Γάλλου μαθηματικού D' Alembert το 1789: *«Η τριγωνομετρία είναι η τέχνη να βρίσκεις τα άγνωστα στοιχεία ενός τριγώνου με τα λιγότερα μέσα που διαθέτεις»*. Εμείς θα περιοριστούμε στη μελέτη των τριγωνομετρικών αριθμών (ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη) οξείας γωνίας. Θα εξετάσουμε τις μεταβολές τους και θα τους χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε αρκετά προβλήματα.

Στη συνέχεια, στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου θα μελετήσουμε τα διανύσματα, μια έννοια γνωστή κυρίως από τη Φυσική.

Χρησιμοποιώντας διανύσματα μπορούμε να παραστήσουμε διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως τη δύναμη, την ταχύτητα κ.ά., στα οποία εκτός από το μέτρο τους είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε και την κατεύθυνσή τους.

Είναι, λοιπόν, πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τα στοιχεία ενός διανύσματος, να μπορούμε να κάνουμε πράξεις μ' αυτά, καθώς και να τα αναλύουμε σε συνιστώσες. Αρκετές δραστηριότητες από την καθημερινή μας ζωή και αρκετά παραδείγματα από τη Φυσική θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε πλήρως τη χρήση των διανυσμάτων.

Τι είναι η Τριγωνομετρία;

Η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε αρχικά για τις ανάγκες της Αστρονομίας και της Γεωγραφίας, αλλά χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια πολλών αιώνων και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, στη Φυσική, στη Μηχανική και στη Χημεία.

Οι έννοιες του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας προέκυψαν από τις παρατηρήσεις των Αστρονόμων της Αρχαιότητας.

Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι τα αστέρια βρίσκονταν πάνω σε μια τεράστια νοητή σφαίρα, στην οποία κινούνταν μόνο οι τότε γνωστοί πλανήτες: Ερμής, Αφροδίτη, Άρης, Δίας, Κρόνος, Σελήνη. Στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν τις αποστά-

σεις μεταξύ των πλανητών –που είναι αδύνατον να μετρηθούν άμεσα – οι αρχαίοι Έλληνες προσπάθησαν να τις υπολογίσουν από τις γωνίες που σχημάτιζαν μεταξύ τους.

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος, ο Πτολεμαίος, ο Ίππαρχος και άλλοι, που ασχολήθηκαν με την Αστρονομία, βρήκαν σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών τριγώνων.



Περίπου δύο χιλιάδες χρόνια πριν δημιουργήθηκαν τριγωνομετρικοί πίνακες, δηλαδή πίνακες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονα, συνημίτονα, εφαπτομένες) γωνιών. Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αυτών αριθμών δεν ήταν καθόλου απλός. Άρχισε να απλοποιείται μετά τον 17ο αιώνα μ.Χ. και

στις ημέρες μας είναι πανεύκολος με τη χρήση των υπολογιστών τσέπης. Σκοπός αυτών των πινάκων ήταν να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί της Αστρονομίας.

Οι εφαρμογές της Αστρονομίας ήταν πολλές και εντυπωσιακές. Ένα απλό παράδειγμα είναι η ναυσιπλοΐα κατά τη διάρκεια της νύχτας. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν ένα ναυτικό όργανο, τον αστρολάβο, με τον οποίο μετρούσαν ουσιαστικά γωνίες και με τη χρήση της τριγωνομετρίας υπολόγιζαν αποστάσεις και χάραζαν την πορεία τους.

Οι αρχαίοι Έλληνες γνωρίζοντας ότι η Γη είναι σφαιρική χρησιμοποίησαν την Τριγωνομετρία στη Γεωγραφία. Ο Πτολεμαίος χρησιμοποίησε τριγωνομετρικούς

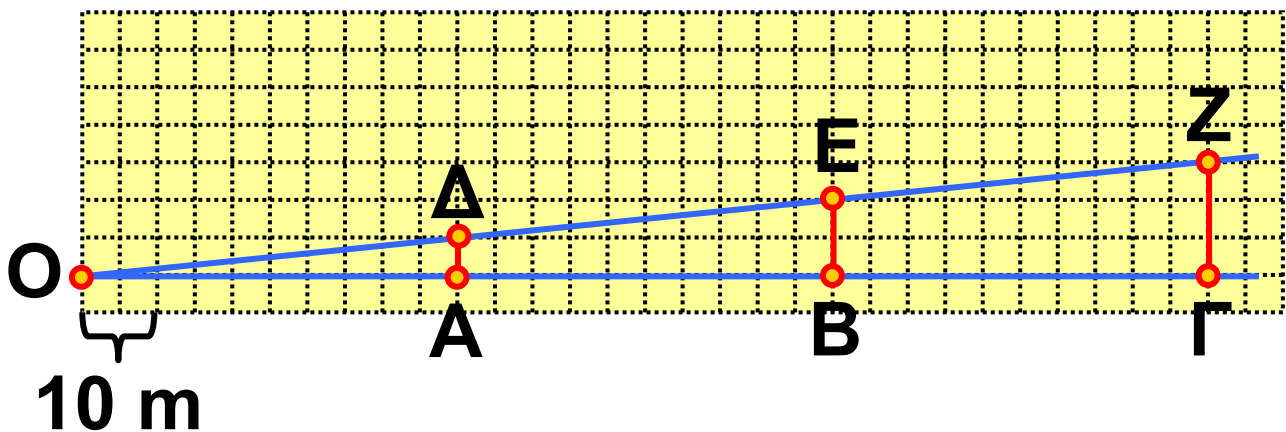
πίνακες στο έργο του «Γεωγραφία», ενώ ο Κολόμβος είχε πάντα μαζί του στα ταξίδια του το έργο του Regiomontanus: «Ephemerides Astronomicae». Παρόλο που η Τριγωνομετρία εφαρμόστηκε αρχικά στη σφαίρα, έχει περισσότερες εφαρμογές στο επίπεδο.

Η Τριγωνομετρία αποτελεί βασικό πεδίο γνώσης, καθώς συμβάλλει στην κατανόηση του χώρου και των ιδιοτήτων του.

Οι εφαρμογές της Τριγωνομετρίας δεν περιορίζονται στη Γεωμετρία, αλλά επεκτείνονται στις βολές στη Φυσική, στην ανάκλαση στην Οπτική, στις αντοχές υλικών στη Στατική και σε άλλους κλάδους των Φυσικών ή ακόμα και των Κοινωνικών επιστημών.



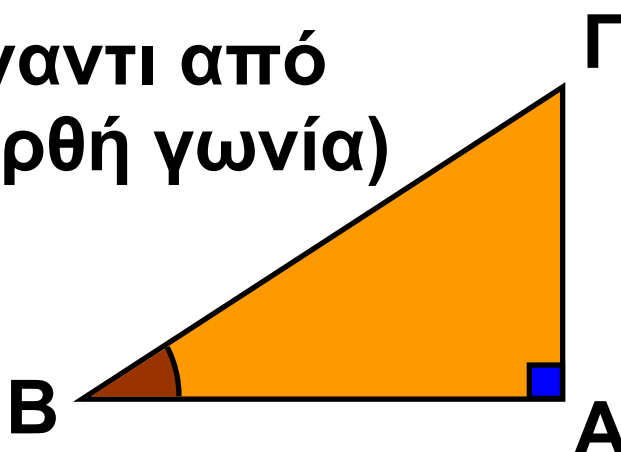
2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η κάθετη πλευρά $A\Gamma$, ονομάζεται «απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας \hat{B} » και η AB «προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας \hat{B} ».

ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ

(απέναντι από την ορθή γωνία)



απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία \hat{B}

προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία \hat{B}

Φυσικά, προκειμένου για τη γωνία $\hat{\Gamma}$, η ΑΒ είναι η «απέναντι», ενώ η ΑΓ είναι η «προσκείμενη» κάθετη πλευρά.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



Η πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο Ο πληροφορεί τον οδηγό του αυτοκινήτου πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος ΟΓ. Το ποσοστό 10% ή $\frac{10}{100} = 0,1$ σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m. Έτσι, π.χ. στο σημείο Α είναι $ΟΑ = 50 \text{ m}$ και ανεβαίνουμε $ΑΔ = 50 \cdot 0,1 \text{ m} = 5 \text{ m}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$OA = 50$	$AD = 5$	$\frac{AD}{OA} =$
$OB = 100$	$BE =$	$\frac{BE}{OB} =$
$OG = 150$	$GZ =$	$\frac{GZ}{OG} =$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

Παρατηρούμε ότι $BE = 10$, $GZ = 15$, οπότε οι λόγοι της τρίτης στήλης παραμένουν σταθεροί:

$$\frac{AD}{OA} = \frac{5}{50} = 0,1$$

$$\frac{BE}{OB} = \frac{10}{100} = 0,1$$

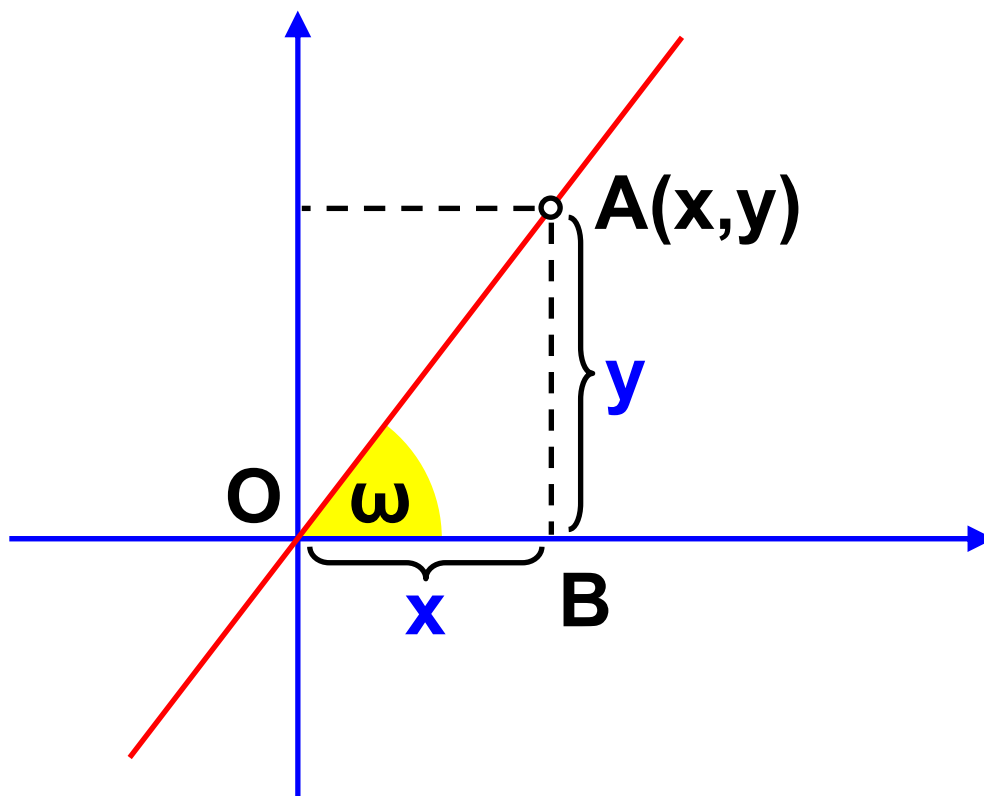
$$\frac{GZ}{OG} = \frac{15}{150} = 0,1$$

Αν ονομάσουμε ω τη γωνία που σχηματίζει ο ανηφορικός δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο, τότε οι λόγοι

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη της γωνίας ω** .

Σχόλιο 1:

Ας θυμηθούμε την κλίση της ευθείας με εξίσωση $y = \alpha \cdot x$, που συναντήσαμε στην παράγραφο 3.2.



Είδαμε ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με τον αριθμό α για κάθε σημείο A της ευθείας με εξίσωση $y = \alpha \cdot x$. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha \cdot x$ με τον άξονα $x'x$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x} = \alpha$$

Η κλίση α της ευθείας με εξίσωση $y = \alpha \cdot x$ είναι ίση με την εφαπτόμενη της γωνίας ω , που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$.

Σχόλιο 2:

Για να υπολογίσουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα

τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών $1^\circ - 89^\circ$, που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου (σελ. 148).

Σε επόμενη παράγραφο (§2.3) θα μάθουμε να υπολογίζουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας χρησιμοποιώντας έναν «επιστημονικό» υπολογιστή τσέπης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 13 \text{ cm}$. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος $AB = 5 \text{ cm}$, να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$.

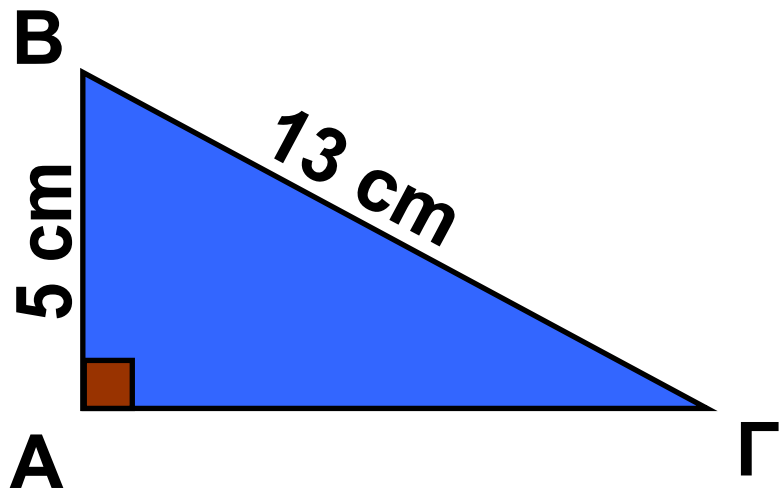
Λύση: Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi\hat{B} &= \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}} = \\ &= \frac{A\Gamma}{AB} \quad \text{και} \end{aligned}$$

$$\varepsilon\hat{\Gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}} =$$

$$= \frac{AB}{A\Gamma}$$

Επομένως,
πρέπει πρώ-
τα να υπολο-
γίσουμε το



μήκος της κάθετης πλευράς AΓ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα
γνωρίζουμε ότι $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ και
αντικαθιστώντας με $AB = 5 \text{ cm}$ και
 $B\Gamma = 13 \text{ cm}$, έχουμε:

$$5^2 + A\Gamma^2 = 13^2 \quad \text{ή} \quad 25 + A\Gamma^2 = 169 \quad \text{ή}$$

$$A\Gamma^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\text{Επομένως, } A\Gamma = \sqrt{144} = 12 \text{ (cm).}$$

$$\text{Άρα: } \varepsilon\hat{B} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{12}{5} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\hat{\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{12}{5}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιάσετε μια γωνία ω , με

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{5}$$

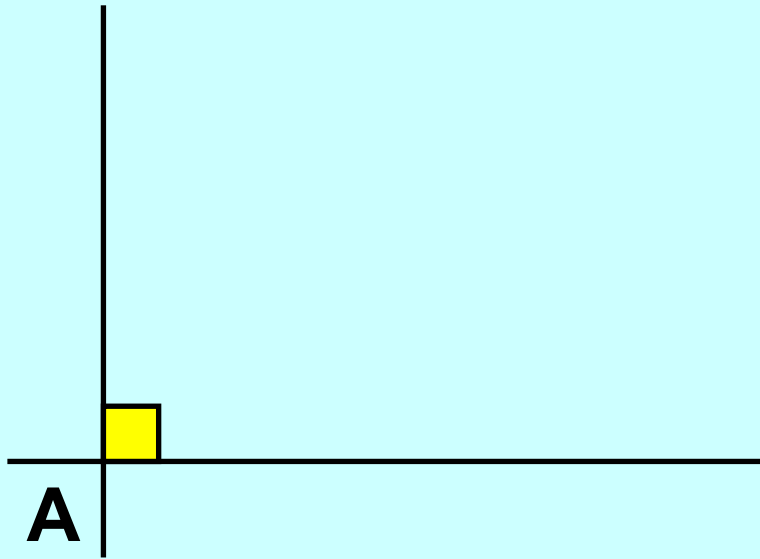
Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Επομένως, για να σχεδιάσουμε μια οξεία γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 1 και η άλλη κάθετη πλευρά ίση με 5.

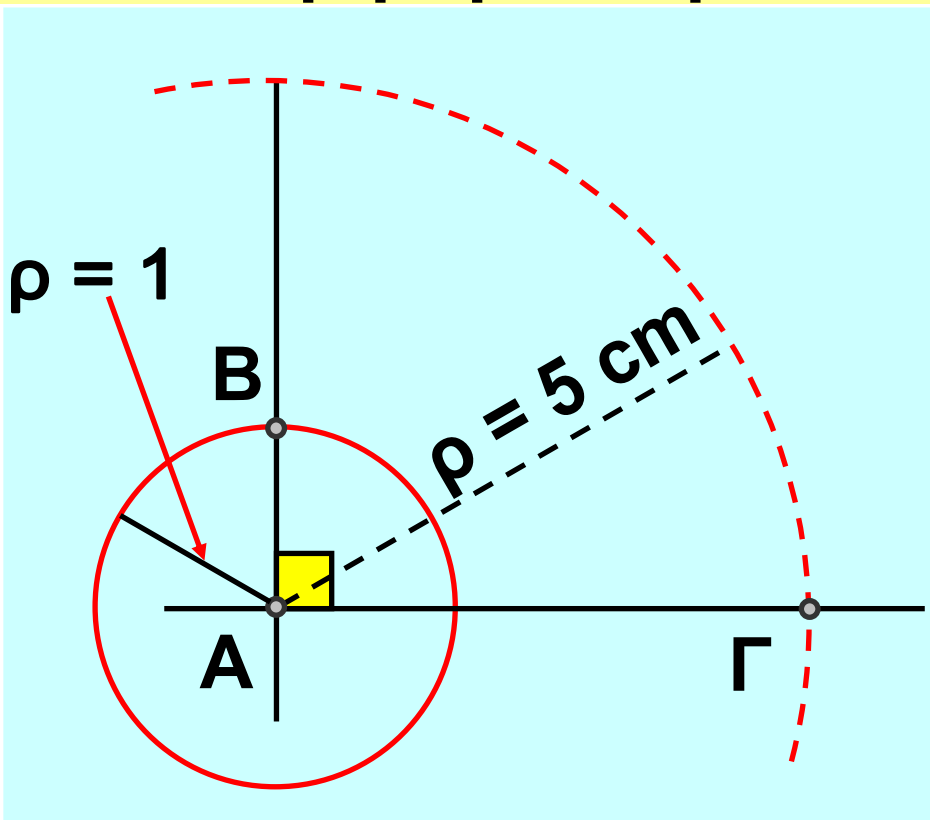
1ο βήμα

Κατασκευή ορθής γωνίας



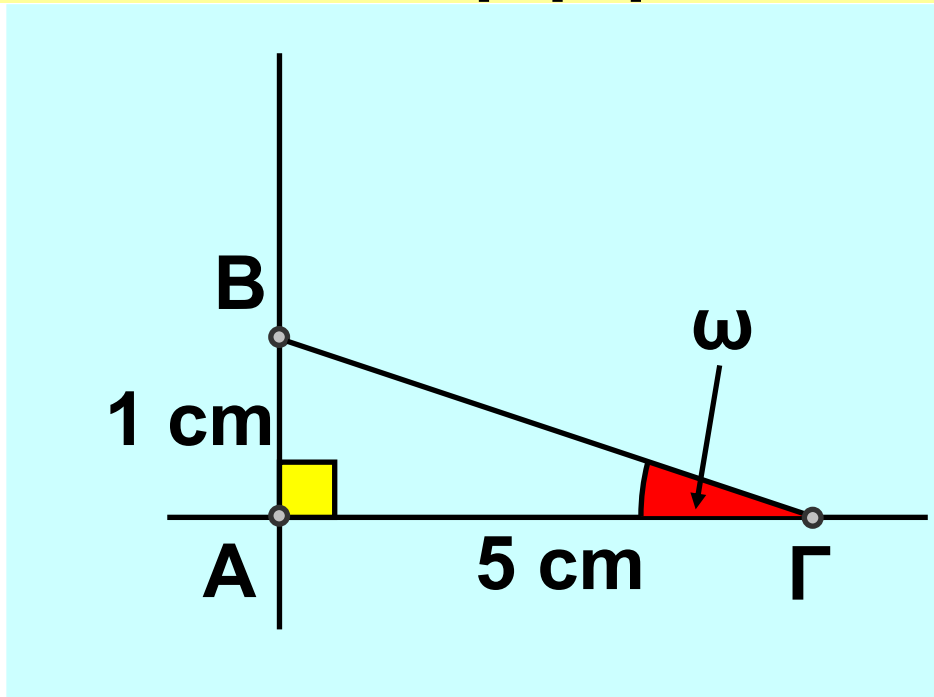
2ο βήμα

Μέτρηση πλευρών



3ο βήμα

Κατασκευή τριγώνου



Για τη γωνία ω ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{AG} = \frac{1}{5} .$$

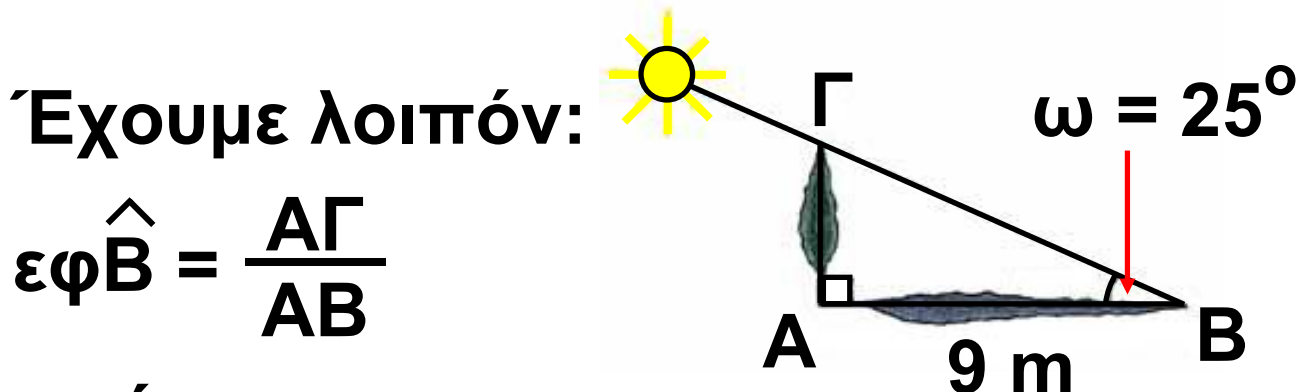
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε το ύψος του κυπαρισσιού του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας το μήκος της σκιάς του και τη γωνία ω .

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ γνωρίζουμε ότι $AB = 9 \text{ m}$ και

$$\hat{B} = \omega = 25^\circ.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πλευρά $A\Gamma$. Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει την απέναντι με την προσκείμενη πλευρά μιας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η εφαπτομένη της γωνίας \hat{B} .



οπότε:

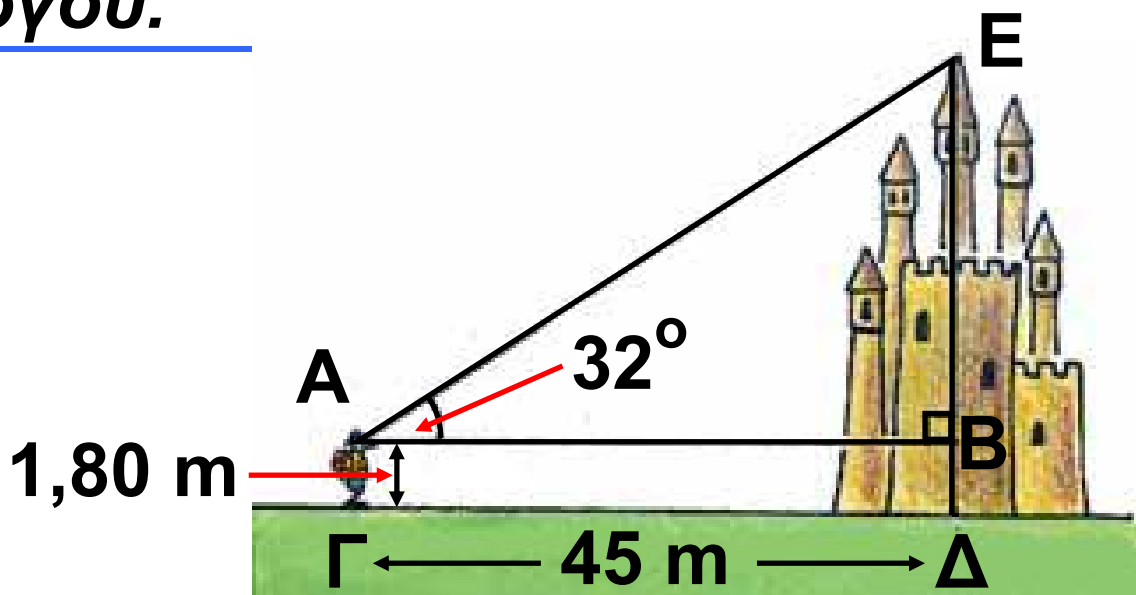
$$A\Gamma = AB \cdot \varepsilon\varphi\hat{B} \quad \text{άρα} \quad A\Gamma = 9 \cdot \varepsilon\varphi 25^\circ$$

Με τη βοήθεια του πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι $\varepsilon\varphi 25^\circ = 0,47$.

Άρα, $A\Gamma = 9 \cdot 0,47 = 4,23$, δηλαδή το ύψος του κυπαρισσιού είναι $4,23 \text{ m}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας τουρίστας ύψους $ΑΓ = 1,80 \text{ m}$ «βλέπει» τον πύργο με γωνία 32° και απέχει από αυτόν 45 m . Να υπολογίσετε το ύψος $ΕΔ$ του πύργου.



Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΕ$ γνωρίζουμε το μήκος της κάθετης πλευράς $ΑΒ = 45 \text{ m}$ και μια οξεία γωνία 32° . Επομένως, για να υπολογίσουμε την άλλη κάθετη πλευρά $ΒΕ$, χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη της γωνίας των 32° .

Είναι:

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi 32^\circ &= \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} \\ &= \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{45}\end{aligned}$$

Από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε: $\varepsilon\varphi 32^\circ = 0,62$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$0,62 = \frac{BE}{45}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$BE = 45 \cdot 0,62 = 27,9 \text{ (m).}$$

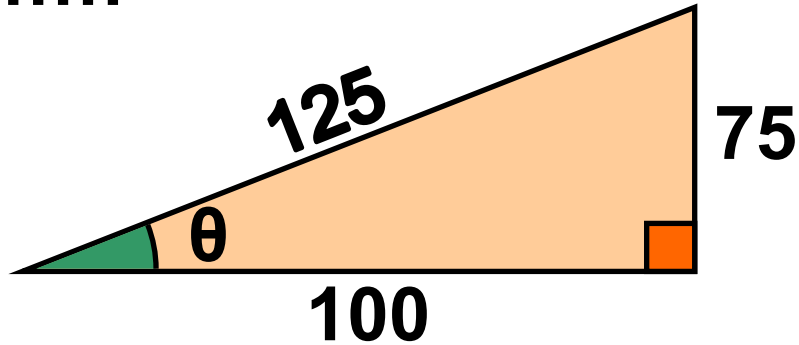
Επομένως, το συνολικό ύψος του πύργου είναι:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta B + BE = 1,8 + 27,9 = \\ &= 29,7 \text{ (m).}\end{aligned}$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon\varphi\theta = \dots\dots$



A: $\frac{100}{75}$, B: $\frac{125}{75}$, Γ: $\frac{75}{100}$, Δ: $\frac{75}{125}$

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

2. Στο παρακάτω σχήμα είναι:

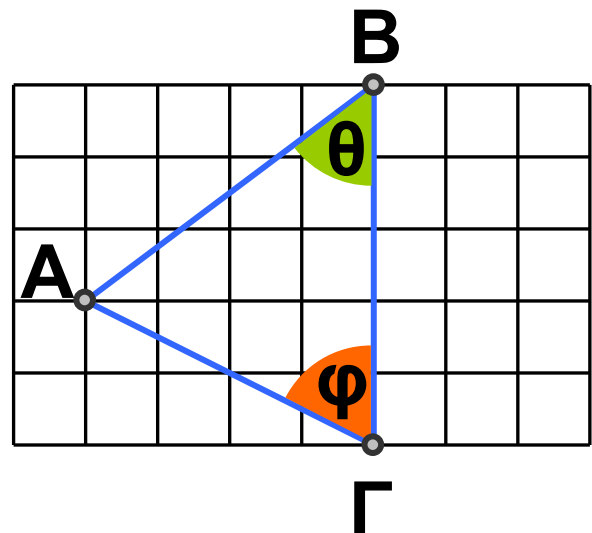
α) $\varepsilon\varphi\theta = \dots\dots$

A: $\frac{3}{4}$

B: $\frac{4}{3}$

Γ: $\frac{4}{5}$

Δ: $\frac{3}{5}$



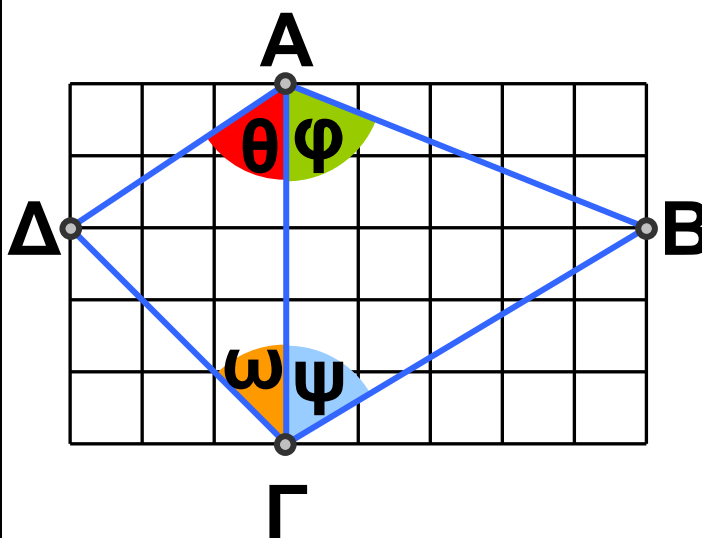
β) εφφ =

A: $\frac{4}{3}$, B: $\frac{3}{4}$, Γ: $\frac{2}{4}$, Δ: 2.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Σε κάθε γωνία θ, φ, ω, ψ του παρακάτω σχήματος να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της.

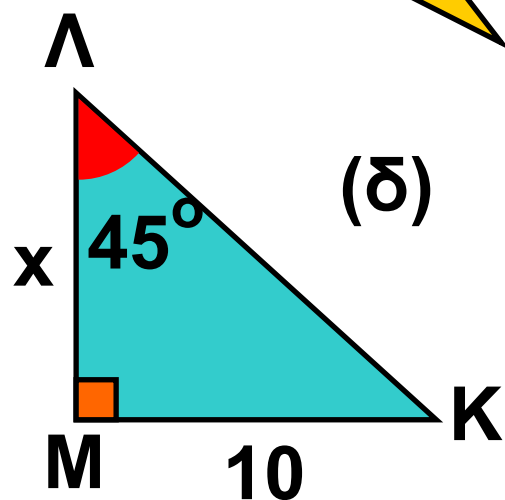
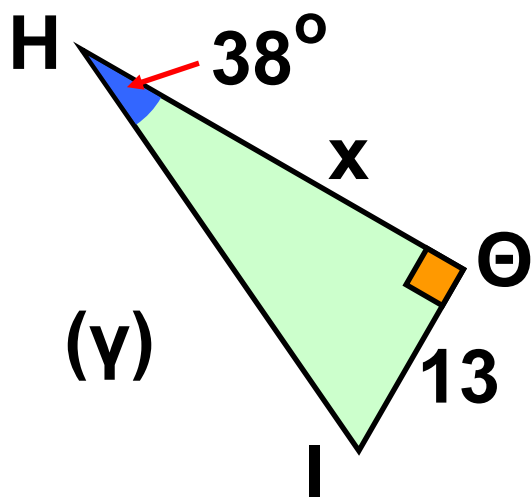
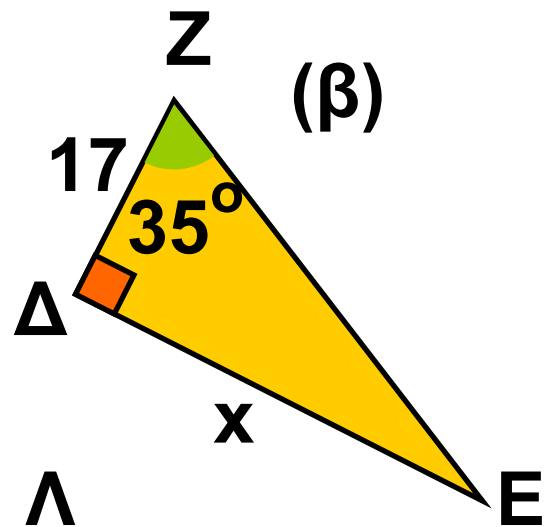
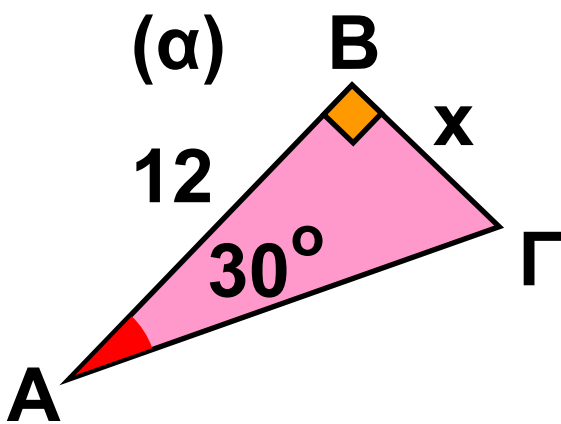
Γωνία	Εφαπτομένη
θ	$\frac{5}{3}$
φ	$\frac{5}{2}$
ω	1
ψ	$\frac{3}{2}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1 Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε το μήκος x :

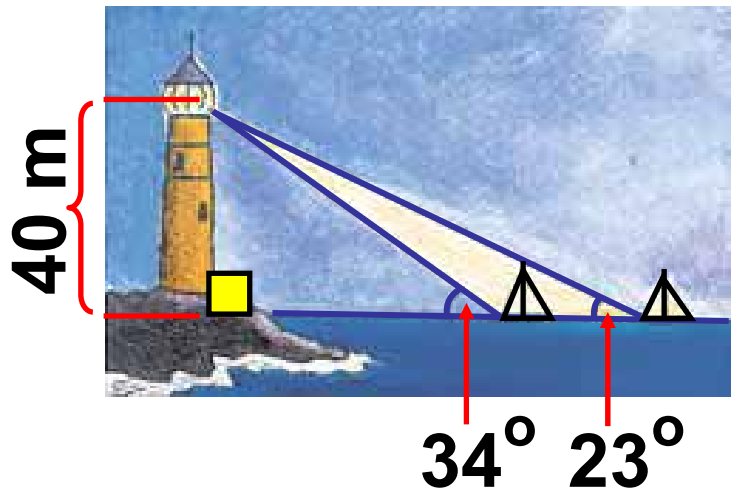


2 Να σχεδιάσετε μια γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega = 0,7$.

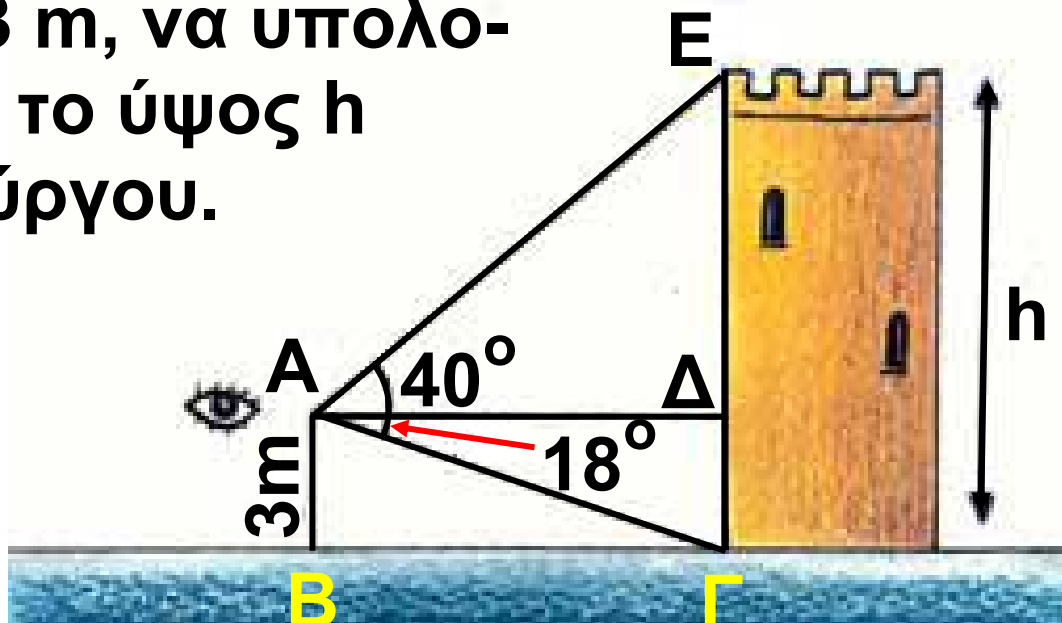
3 Ποια στοιχεία μπορείτε να υπολογίσετε σε ορθογώνιο τρίγωνο

με μια οξεία γωνία 30° , αν η απέναντι κάθετη πλευρά έχει μήκος 4 cm;

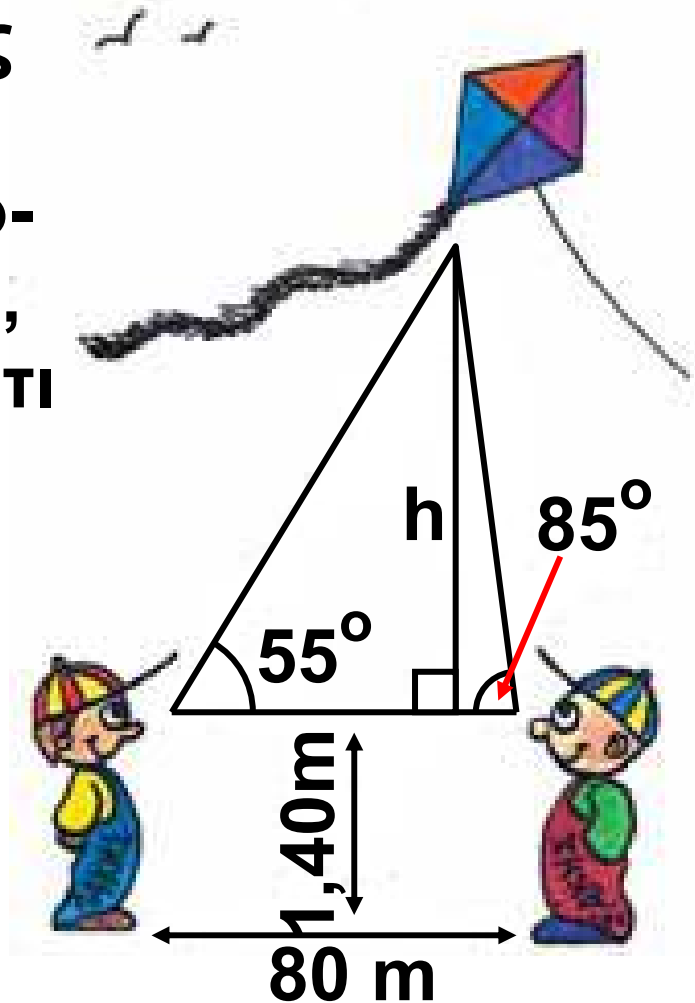
4 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση των δύο πλοίων.



5 Ένας τουρίστας βλέπει την κορυφή ενός πύργου από σημείο A με γωνία 40° και τη βάση του πύργου με γωνία 18° . Αν γνωρίζετε ότι $AB = 3$ m, να υπολογίσετε το ύψος h του πύργου.

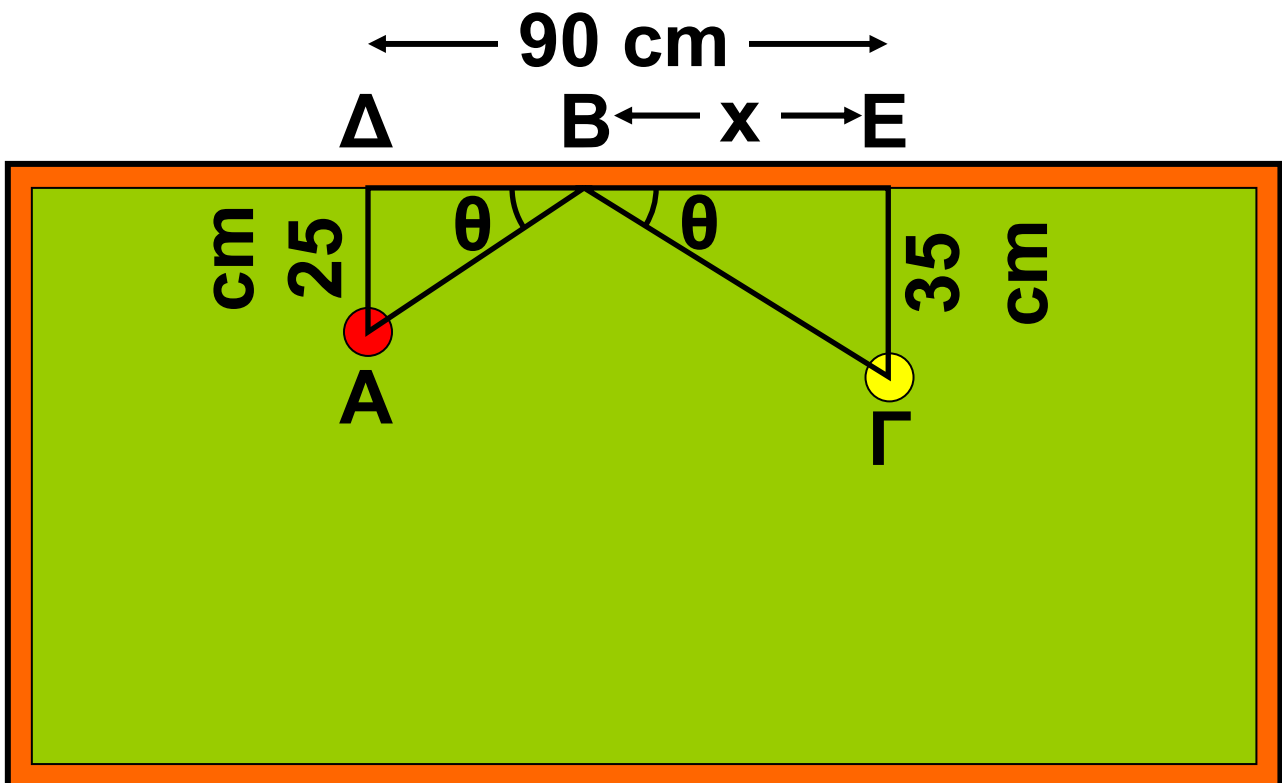


6 Την Καθαρά Δευτέρα ο Λάκης και ο Σάκης βλέπουν το χαρταετό του Μάκη με γωνίες 55° και 85° αντίστοιχα. Ο Λάκης και ο Σάκης βρίσκονται σε απόσταση 80 m. Να βρείτε σε τι ύψος από το έδαφος έχει ανέβει ο χαρταετός του Μάκη, αν γνωρίζουμε ότι τα μάτια του Λάκη και του Σάκη βρίσκονται σε ύψος 1,40 m.



7 Στο σχήμα της επόμενης σελίδας βλέπουμε ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Δύο μπάλες Α και Γ

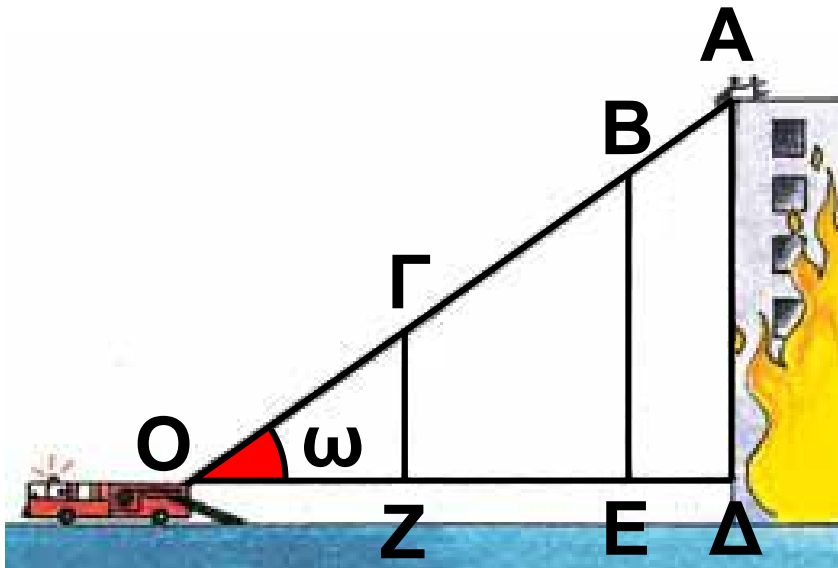
είναι τοποθετημένες έτσι ώστε,
 $\Delta E = 90 \text{ cm}$, $A\Delta = 25 \text{ cm}$, $\Gamma E = 35 \text{ cm}$
 και $BE = x \text{ cm}$. Ένας παίκτης θέλει
 να χτυπήσει τη μπάλα Γ με τη
 μπάλα A ακολουθώντας τη
 διαδρομή $AB\Gamma$ του σχήματος.
 α) Να εκφράσετε την απόσταση $B\Delta$
 ως συνάρτηση του x .
 β) Στο τρίγωνο $A\Delta B$ να εκφράσετε
 την εφθ ως συνάρτηση του x .
 γ) Στο τρίγωνο $BE\Gamma$ να εκφράσετε
 την εφθ ως συνάρτηση του x .



δ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα των ερωτημάτων (β) και (γ), να αποδείξετε ότι το x είναι λύση της εξίσωσης $35(90 - x) = 25x$. Να προσδιορίσετε τον αριθμό x .



2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας



Το ημίτονο

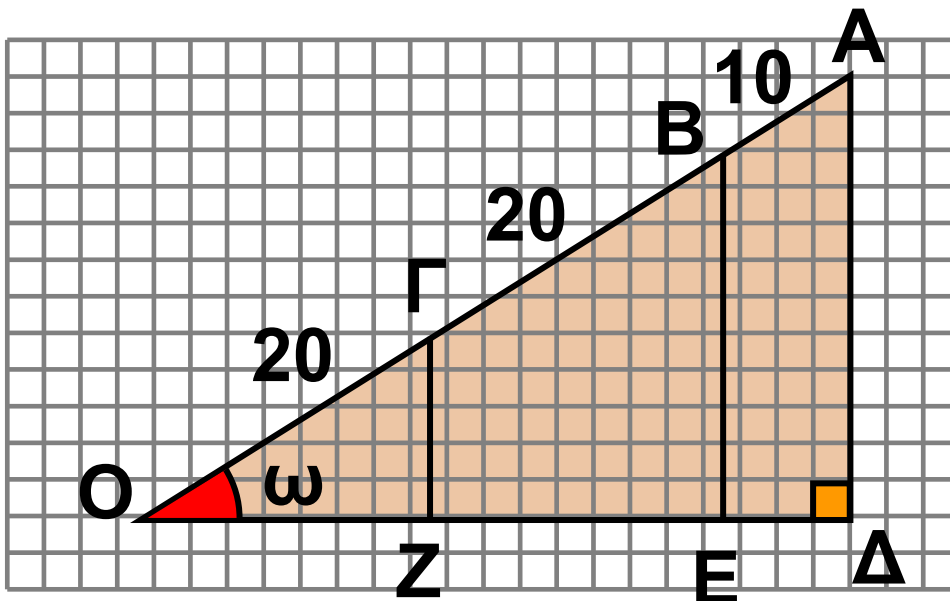
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ένα πυροσβεστικό όχημα σταματά μπροστά από ένα κτίριο που φλέγεται, για να κατεβάσει έναν άνθρωπο που βρίσκεται στην ταράτσα του κτιρίου. Η σκάλα του οχήματος έχει μήκος $OA = 50\text{ m}$ και το κτίριο έχει ύψος $AD = 30\text{ m}$. Ο πυροσβέστης που βρίσκεται στην άκρη της σκάλας παίρνει τον άνθρωπο που κινδυνεύει και η

σκάλα αρχίζει να μαζεύεται. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$ΟΑ = 50$	$ΑΔ = 30$	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} =$	
$ΟΒ = 40$	$ΒΕ = 24$	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ} =$	
$ΟΓ = 20$	$ΓΖ = 12$	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ} =$	

Τι παρατηρείτε;



Λύση

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι της τρίτης στήλης παραμένουν σταθεροί:

$$\frac{ΑΔ}{ΟΑ} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}, \quad \frac{ΒΕ}{ΟΒ} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

και $\frac{ΓΖ}{ΟΓ} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

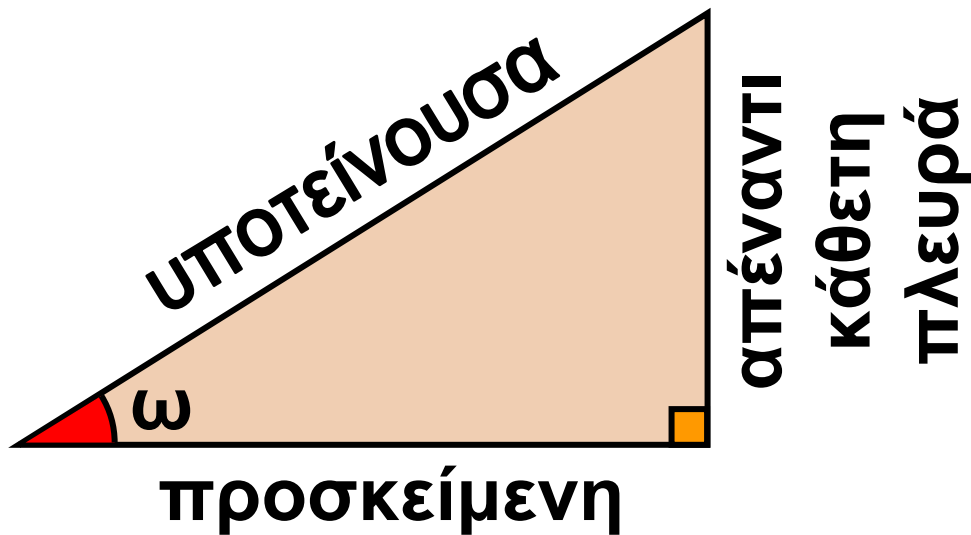
Είναι φανερό ότι ο λόγος αυτός παραμένει σταθερός για κάθε διαδοχική θέση της σκάλας. Επίσης, είναι φανερό ότι η γωνία ω στα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ που σχηματίζονται, παραμένει σταθερή.

Ο σταθερός αυτός λόγος γράφεται

ως: $\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$

ονομάζεται ημίτονο της γωνίας ω και συμβολίζεται με $\eta\omega$. Δηλαδή

$$\eta_{\omega} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$



Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας ω .

Το συνημίτονο

Αν συμπληρώσουμε, τώρα, τον παρακάτω πίνακα για το ίδιο σχήμα:

$OA = 50$	$OD = 40$	$\frac{OD}{OA} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$
$OB = 40$	$OE = 32$	$\frac{OE}{OB} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$
$OG = 20$	$OZ = 16$	$\frac{OZ}{OG} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

παρατηρούμε ότι σχηματίζεται και ένας δεύτερος σταθερός λόγος:

προσκειμένη κάθετη πλευρά
υποτείνουσα

Ο λόγος αυτός ονομάζεται **συνημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται **συν ω** .

συν ω = προσκειμένη κάθετη πλευρά
υποτείνουσα

Επομένως:

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο της γωνίας ω** .

Παρατηρήσεις:

α) Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις κάθετες πλευρές, οπότε οι λόγοι:

απέναντι κάθετη πλευρά και
υποτείνουσα

προσκείμενη κάθετη πλευρά
υποτείνουσα

είναι μικρότεροι της μονάδας.

Επομένως ισχύουν οι ανισώσεις:

$0 < \eta\mu\omega < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$
για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω .

β) Αν τώρα διαιρέσουμε το $\eta\mu\omega$ με το $\sigma\upsilon\nu\omega$ θα προκύψει

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{ΑΔ}{ΟΑ}}{\frac{ΟΔ}{ΟΑ}} = \frac{ΑΔ}{ΟΔ} = \epsilon\phi\omega,$$

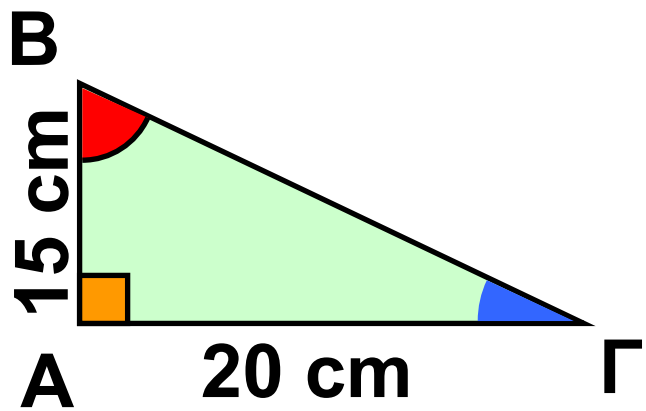
όπως φαίνεται από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΔ$ του σχήματος της προηγούμενης σελίδας. Άρα:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $AB = 15 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 20 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$. Τι παρατηρείτε;

Λύση: Για τον υπολογισμό του ημιτόνου ή του συνημιτόνου



μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, πρέπει να γνωρίζουμε και το μήκος της υποτείνουσας $B\Gamma$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= AB^2 + A\Gamma^2 = 15^2 + 20^2 = \\ &= 225 + 400 = 625 \text{ οπότε} \\ B\Gamma &= \sqrt{625} = 25 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\underbrace{\eta_{\mu B}} = \underbrace{\sigma_{\nu B}} = \underbrace{\sigma_{\nu \Gamma}} \text{ και } \underbrace{\eta_{\mu \Gamma}} = \underbrace{\sigma_{\nu B}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\underbrace{\sigma_{\nu \Gamma}} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πάξυρά στη } \Gamma}{\text{ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} =$$

$$\underbrace{\eta_{\mu \Gamma}} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πάξυρά στη } \Gamma}{\text{ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ}} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{25}{25} = \frac{5}{5}$$

$$\underbrace{\sigma_{\nu B}} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πάξυρά στη } B}{\text{ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ}} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma} =$$

$$\underbrace{\eta_{\mu B}} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πάξυρά στη } B}{\text{ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ}} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιάσετε μια οξεία γωνία ω ,

$$\text{με } \eta\mu\omega = \frac{1}{5}$$

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό του ημιτόνου οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου, ισχύει:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

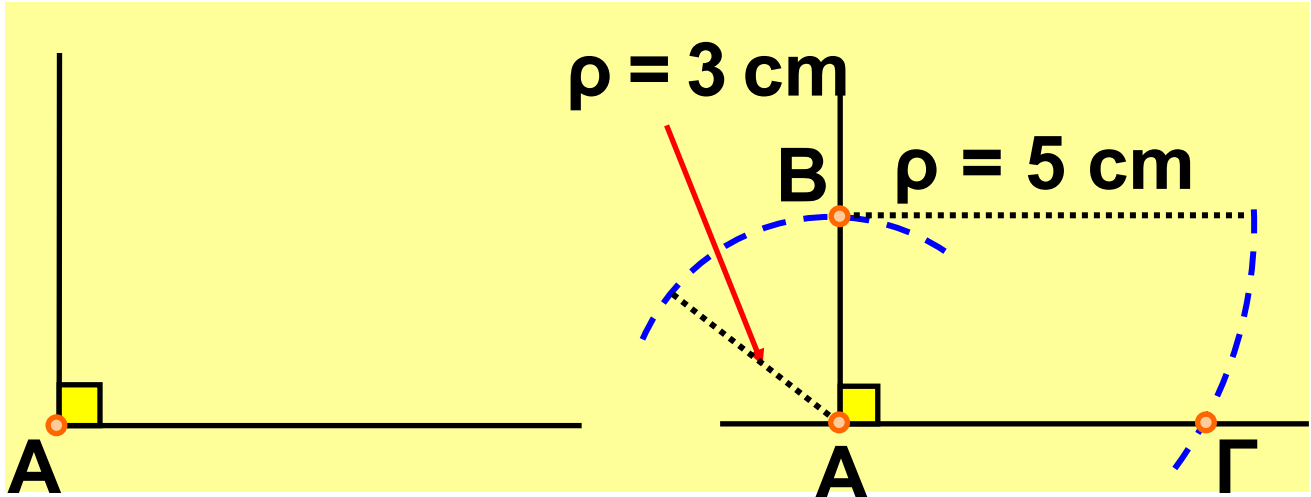
Επομένως, για να κατασκευάσουμε οξεία γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 3 και η υποτείνουσά του ίση με 5.

1ο βήμα

Κατασκευή
ορθής γωνίας

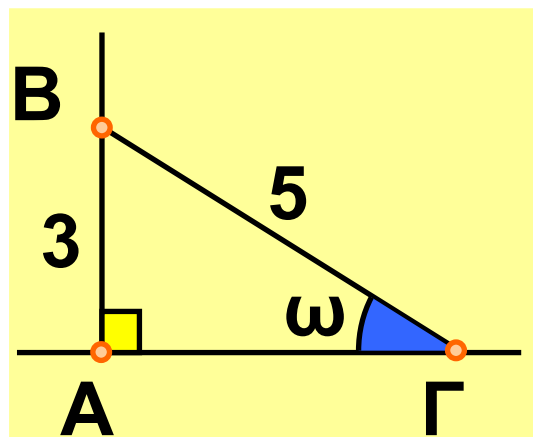
2ο βήμα

Μέτρηση
πλευρών



3ο βήμα

Κατασκευή τριγώνου



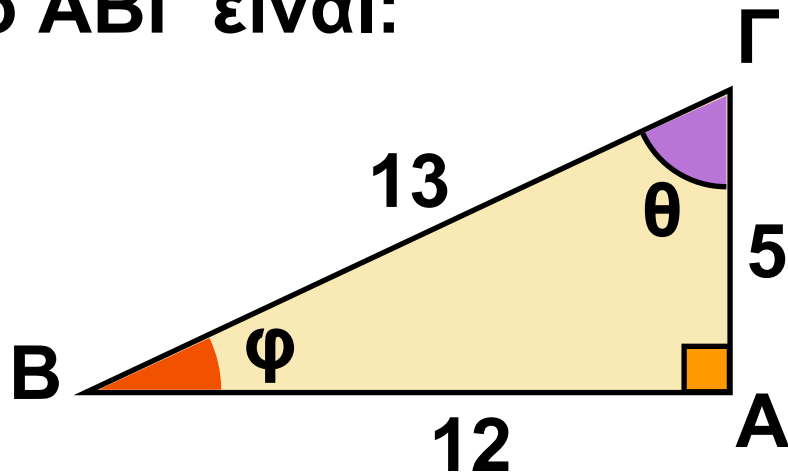
Για τη γωνία ω ισχύει:

$$\eta\mu\omega = \frac{AB}{BG} = \frac{3}{5} .$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

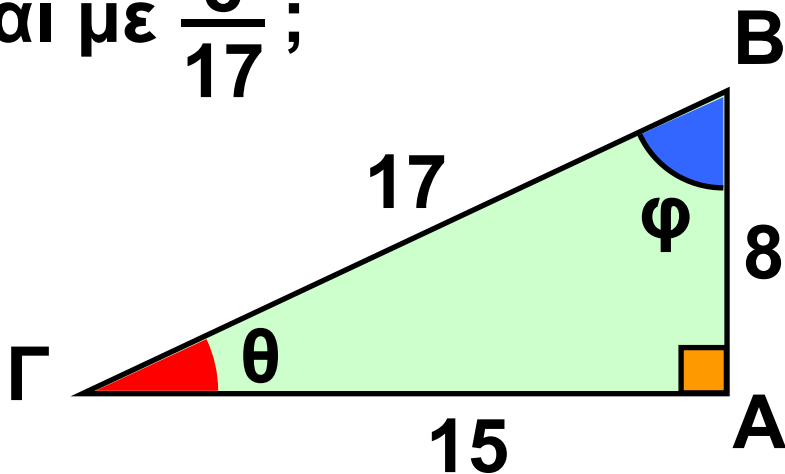


		A	B	Γ	Δ
α)	$\eta\mu\theta =$	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$
β)	$\eta\mu\varphi =$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{5}$
γ)	$\sigma\upsilon\nu\theta =$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{5}{13}$
δ)	$\sigma\upsilon\nu\varphi =$	$\frac{5}{13}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{13}{12}$

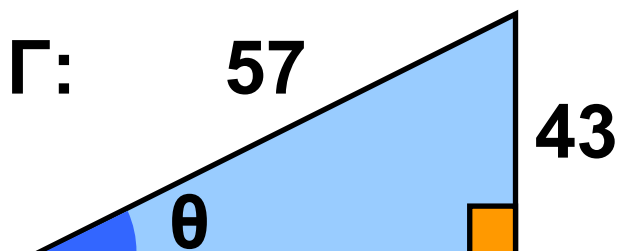
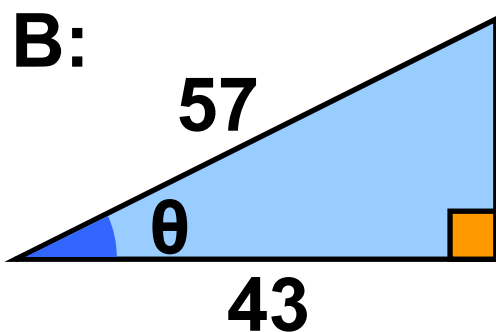
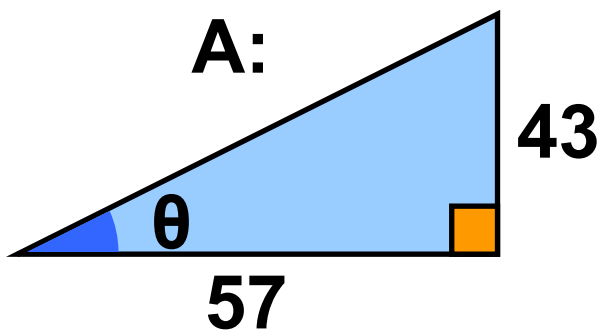
2 Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ποιος από τους παρακάτω αριθμούς:

A: $\sin\theta$ B: $\sin\varphi$ Γ: $\eta\mu\varphi$

ισούται με $\frac{8}{17}$;



3 Σε ποιο από τα παρακάτω τρίγωνα ισχύει $\sin\theta = \frac{43}{57}$



4 Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{5}$, τότε:
 $\epsilon\phi\theta = \dots$

A: $\frac{3}{4}$, B: $\frac{4}{3}$, Γ: $\frac{5}{3}$, Δ: $\frac{5}{4}$

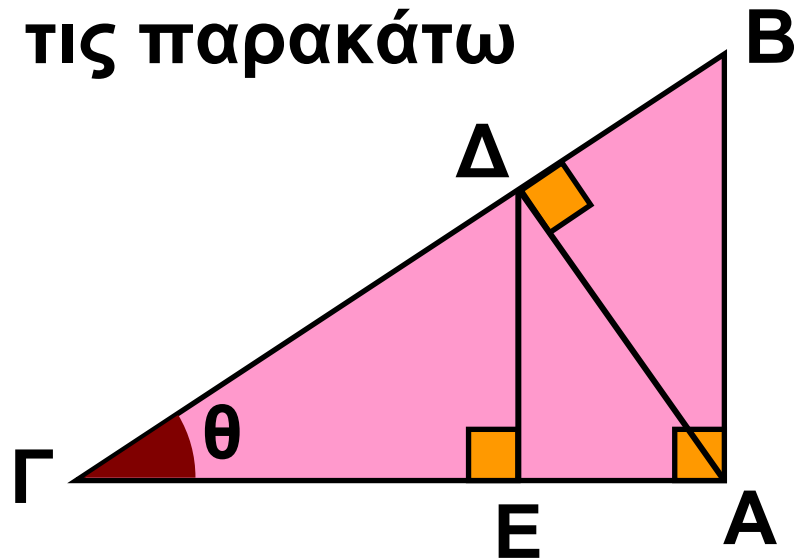
Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

5 Να βάλετε σε κύκλο τις τιμές που δε μπορούν να εκφράζουν το συνημίτονο οξείας γωνίας:

α) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, β) $-\frac{1}{2}$, γ) $\frac{2}{3}$, δ) $\frac{3}{2}$

ε) $\frac{\sqrt{5}}{4}$, στ) 1,45

6 Δίνεται το παρακάτω σχήμα. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω σχέσεις:



α) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$

στ) $\eta\mu\theta = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$

β) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$

ζ) $\eta\mu\theta = \frac{ΔΕ}{ΓΔ}$

γ) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{ΓΒ}{ΓΕ}$

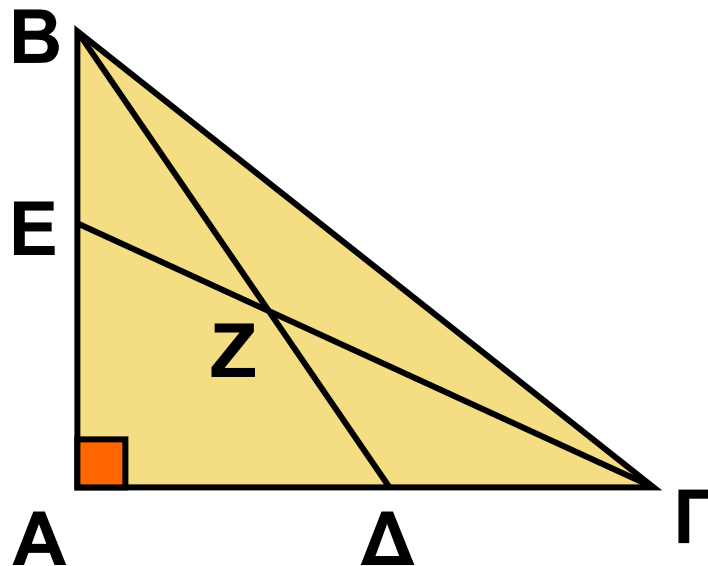
η) $\eta\mu\theta = \frac{ΑΔ}{ΓΔ}$

δ) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$

θ) $\eta\mu\theta = \frac{ΑΔ}{ΑΓ}$

ε) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{ΓΕ}{ΓΔ}$

7 Στο παρακάτω σχήμα η γωνία \hat{A} είναι ορθή. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω φράσεις:



α) Στο τρίγωνο.....είναι:

συν $\hat{A}\hat{\Delta}B = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$.

β) Στο τρίγωνοείναι:

ημ $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$.

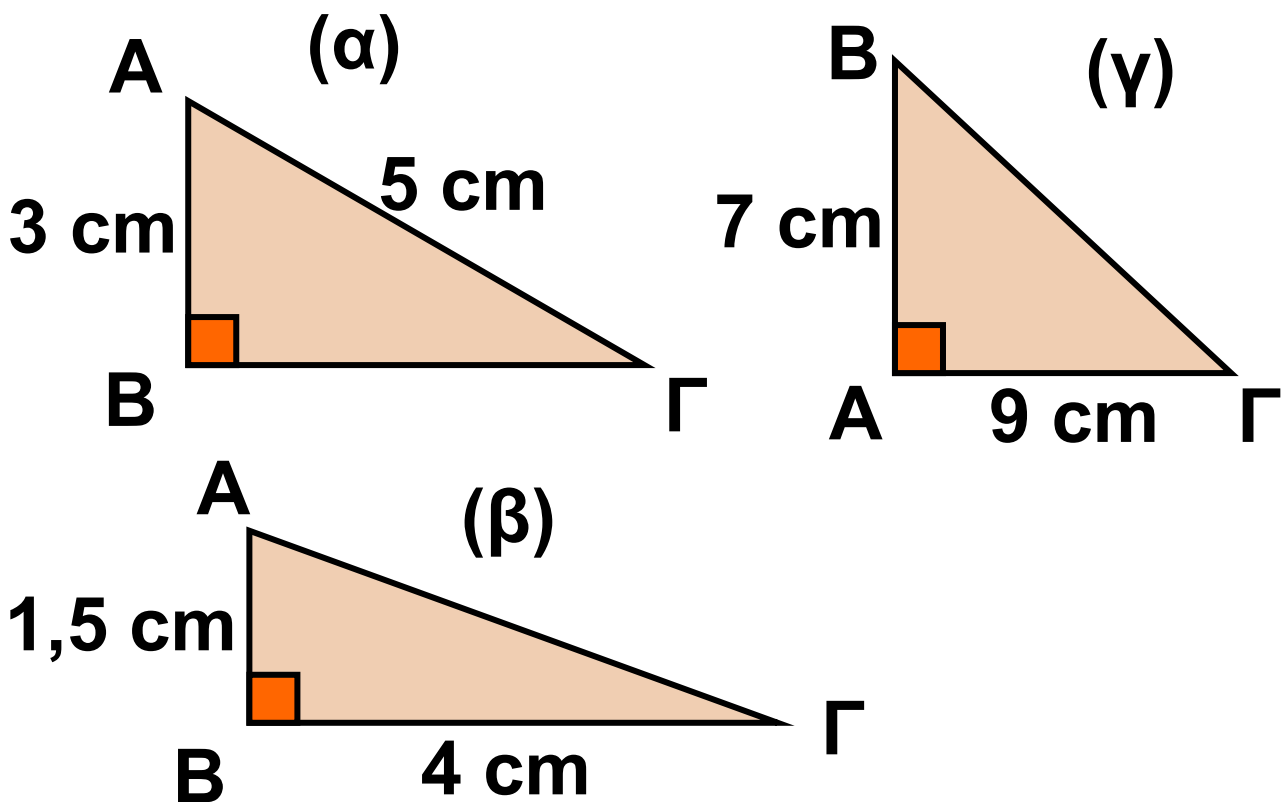
γ) Στο τρίγωνοείναι:

συν..... = $\frac{AE}{E\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1 Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των οξειών γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

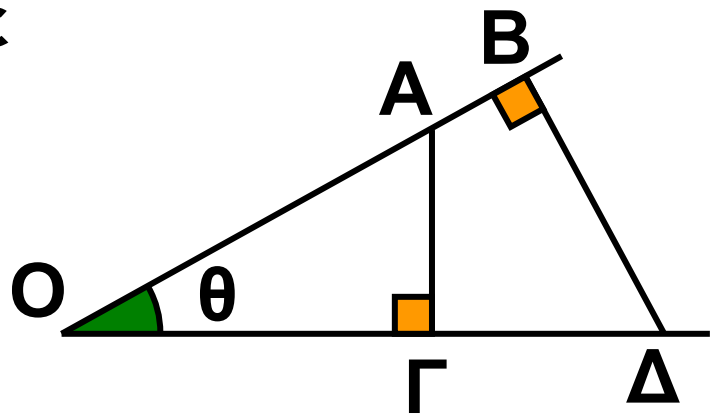


2 Δίνεται μια οξεία γωνία ω για την οποία ισχύει $\sin \omega = \frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$.

3 Δίνεται μια οξεία γωνία ω . Να αποδείξετε ότι:

α) $2 + 5\eta\mu\omega < 7$ β) $4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega > 2$
γ) $5\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega < 8$

4 Στο παρακάτω σχήμα είναι:
 $OA = 10$ m, $OB = 12$ m και $OG = 8$ m.
Να υπολογίσετε
τις αποστάσεις
 OD , AG και BD .



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

**Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων
ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ**

Αστρολάβος είναι ένα αστρονομικό όργανο που εφευρέθηκε από τον έλληνα αστρονόμο Ίππαρχο το 2ο αιώνα π.Χ. για να μετρήσει το ύψος ενός αστεριού πάνω από τον ορίζοντα, καθώς και τη γωνιακή απόσταση δύο αστεριών.

Στην πρώτη του μορφή ο αστρολάβος ήταν ένας ξύλινος δίσκος, στο κυκλικό πλαίσιο του οποίου ήταν χαραγμένες οι υποδιαίρεσεις του σε μοίρες και μια ακτίνα που έδειχνε το μηδέν (αρχή) των υποδιαίρεσεων.



Στο κέντρο του δίσκου ήταν στερεωμένος ένας κανόνας (χάρακας), που μπορούσε να περιστρέφεται και με τον οποίο γινόταν η στόχευση του αστεριού.

Αργότερα οι αστρολάβοι έγιναν μεταλλικοί, με παραστάσεις από ζωδιακό κύκλο και κάποιους αστρονομικούς χάρτες. Ήταν το κυριότερο όργανο ναυσιπλοΐας κατά το μεσαίωνα και αντικαταστάθηκε από τον εξάντα τον 18ο αιώνα.

Σήμερα οι αστρολάβοι είναι αστρονομικά όργανα μεγίστης ακρίβειας, εφοδιασμένα με διόπτρα μπροστά από την οποία είναι προσαρμοσμένο ένα πρίσμα. Προσδιορίζουν τη χρονική στιγμή κατά την οποία ένα συγκεκριμένο αστέρι βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα σε ορισμένο ύψος, συνήθως 45° ή 60° .

Στη γαλλική αυτή μικρογραφία του 13ου αιώνα τρεις μοναχοί παρατηρούν με έναν αστρολάβο κάποιο αστέρι.



2.3. Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

Η χρήση του υπολογιστή τσέπης για τον υπολογισμό του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης μιας γωνίας ω

Επειδή ο υπολογισμός του ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης μιας γωνίας δεν είναι απλός, χρησιμοποιούμε συχνά έναν «επιστημονικό» υπολογιστή τσέπης. Ο «επιστημονικός» υπολογιστής περιλαμβάνει τα πλήκτρα `sin`, `cos` και `tan`.

Το πρώτο υπολογίζει το ημίτονο, το δεύτερο το συνημίτονο και το τρίτο την εφαπτομένη μιας γωνίας (π.χ. των 63°) ως εξής:

α) Πατάμε το πλήκτρο που μετα-
τρέπει τους αριθμούς σε μοίρες. Το
πλήκτρο αυτό διαφέρει από υπο-
λογιστή σε υπολογιστή. Συνήθως η
ένδειξη που φανερώνει ότι έχουμε
πατήσει το σωστό πλήκτρο είναι
DEG.

β) Πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα:

6 **3** **sin** ή **sin** **6** **3**

που υπολογίζει το $\eta\mu 63^\circ$.

γ) Στην οθόνη παρουσιάζεται ο
αριθμός 0,891 που είναι το $\eta\mu 63^\circ$.

δ) Ανάλογα πατώντας τα πλήκτρα:

6 **3** **cos** ή **cos** **6** **3**

έχουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu 63^\circ = 0,454$ και

6 **3** **tan** ή **tan** **6** **3**

έχουμε ότι: $\epsilon\phi 63^\circ = 1,963$.

Παρατήρηση:

**Στο τέλος του βιβλίου (σελ. 148)
μπορείτε να βρείτε έναν πίνακα με**

τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 1° έως 89° , για να τον χρησιμοποιήσετε στις ασκήσεις.

Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης οξείας γωνίας ω

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν μεταβάλλεται η γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης ή τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	28°	47°	68°	83°
ημίτονο				
συνημίτονο				
εφαπτομένη				

Λύση

Βρίσκουμε ότι:

	28°	47°	68°	83°
ημίτονο	0,469	0,731	0,927	0,992
συνημίτονο	0,883	0,682	0,375	0,122
εφαπτομένη	0,532	1,072	2,475	8,144

Από τον προηγούμενο πίνακα παρατηρούμε ότι:

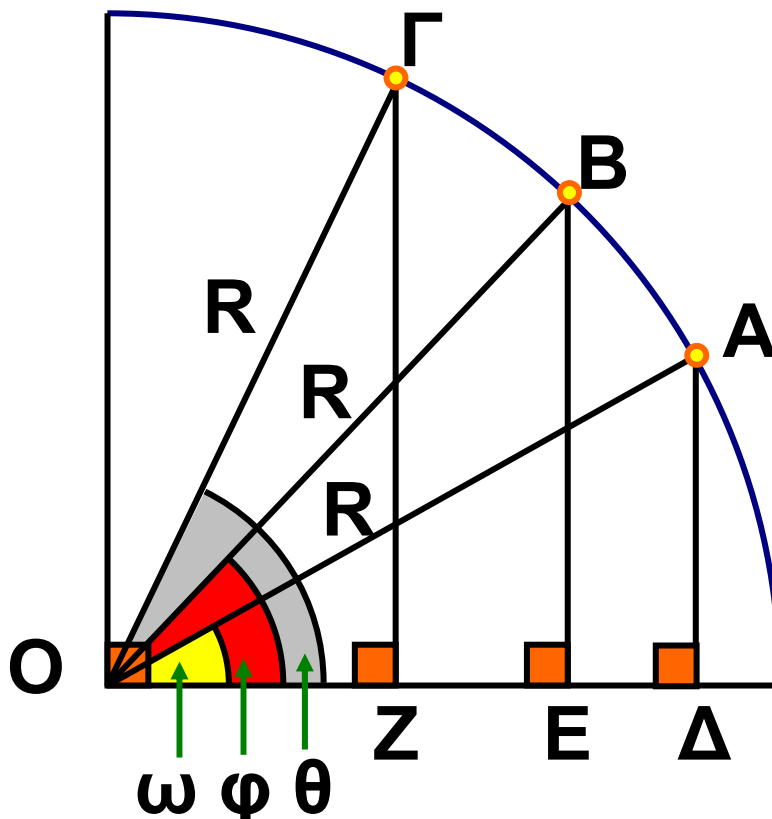
Όταν μια οξεία γωνία αυξάνεται, τότε: αυξάνεται το ημίτονο της, ελαττώνεται το συνημίτονο της και αυξάνεται η εφαπτομένη της.

Γεωμετρικά, τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στα σχήματα της επόμενης σελίδας:

Σχηματίζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΟΑΔ$, $ΟΒΕ$, $ΟΓΖ$, με σταθερή υποτείνουσα $R = ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ$ και θεωρούμε τρεις γωνίες: $\omega < \varphi < \theta$.

Παρατηρούμε ότι: $ΑΔ < ΒΕ < ΓΖ$.
 Επομένως, διαιρώντας με R έχουμε

ότι: $\frac{ΑΔ}{R} < \frac{ΒΕ}{R} < \frac{ΓΖ}{R}$ ή
 $\eta\mu\omega < \eta\mu\varphi < \eta\mu\theta$.

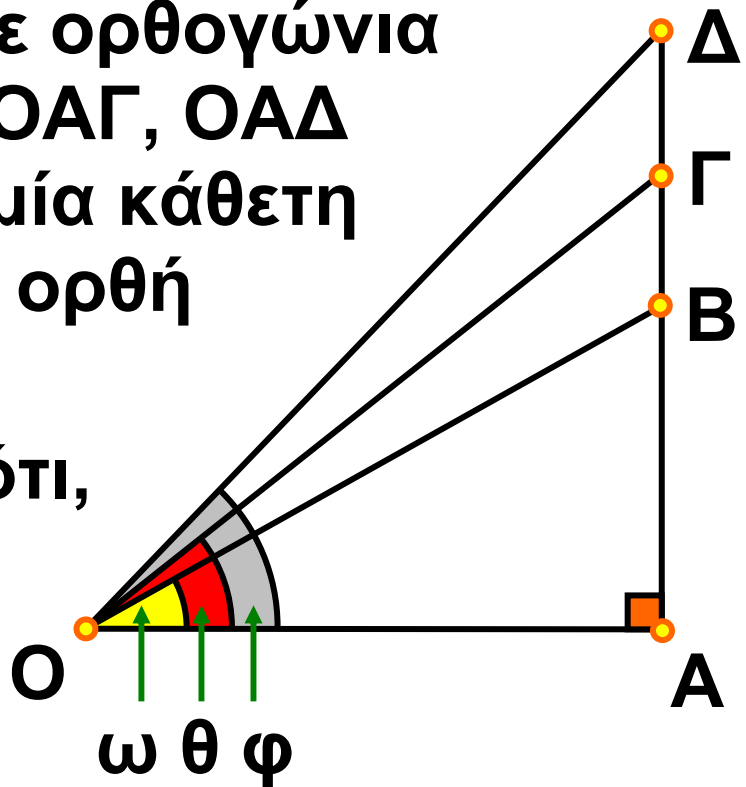


Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι:
 $ΟΔ > ΟΕ > ΟΖ$.

Οπότε: $\frac{ΟΔ}{R} > \frac{ΟΕ}{R} > \frac{ΟΖ}{R}$ ή

$\sigma\upsilon\nu\omega > \sigma\upsilon\nu\varphi > \sigma\upsilon\nu\theta$.

Ας θεωρήσουμε ορθογώνια
 τρίγωνα OAB , OAG , OAD
 με σταθερή τη μία κάθετη
 πλευρά OA και ορθή
 τη γωνία \hat{A} .



Παρατηρούμε ότι,
 όταν η οξεία
 γωνία με
 κορυφή το
 σημείο O

μεγαλώνει, δηλαδή: $\omega < \phi < \theta$, τότε
 μεγαλώνει αντίστοιχα η απέναντι
 κάθετη πλευρά: $AB < AG < AD$.

Επομένως: $\frac{AB}{OA} < \frac{AG}{OA} < \frac{AD}{OA}$ ή

$\epsilon\phi\omega < \epsilon\phi\phi < \epsilon\phi\theta$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

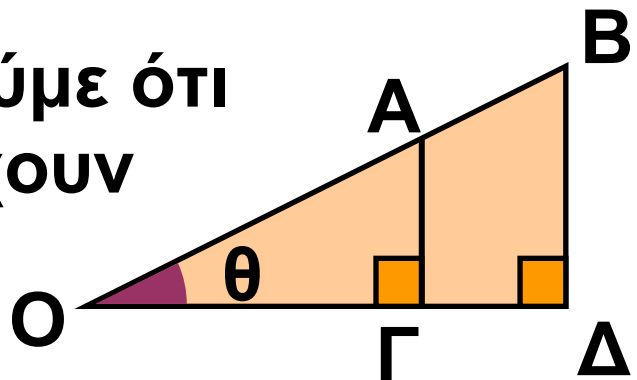
• Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Στο παρακάτω σχήμα είναι $OA = 5$ cm , $OB = 8$ cm και $AG = 2$ cm . Να υπολογίσετε την απόσταση BD .

Λύση: Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν δύο ορθογώνια τρίγωνα,



τα OAG και $OBΔ$ με κοινή γωνία θ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAG έχου-

$$\mu\epsilon: \eta\mu\theta = \frac{AG}{OA}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $OBΔ$ έχου-

$$\mu\epsilon: \eta\mu\theta = \frac{BD}{OB}.$$

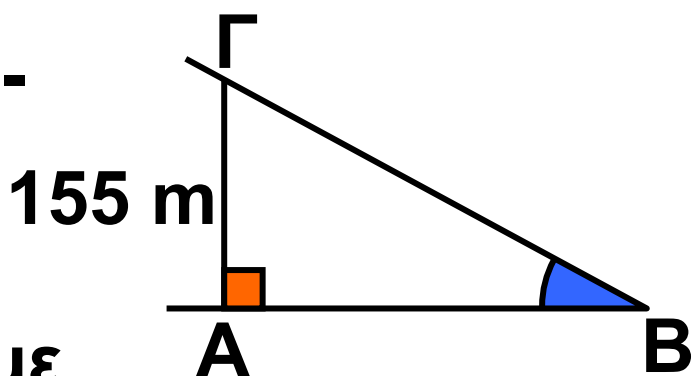
Αρα, θα ισχύει ότι: $\frac{ΑΓ}{ΟΑ} = \frac{ΒΔ}{ΟΒ}$
οπότε:

$$ΒΔ = \frac{ΑΓ}{ΟΑ} \cdot ΟΒ \quad \text{ή} \quad ΒΔ = \frac{2}{5} \cdot 8 = \frac{16}{5} \\ = 3,2 \text{ cm.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζει μια πίστα του σκι με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\eta\mu\hat{B} = 0,31$. Αν ένας σκιέρ βρίσκεται σε σημείο Γ ύψους $ΑΓ = 155 \text{ m}$ από το έδαφος, να βρεθεί η απόσταση ΒΓ που θα διανύσει ο σκιέρ ώσπου να φτάσει στο έδαφος.

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) πρέπει να βρούμε την πλευρά (υποτείνουσα) ΒΓ



γνωρίζοντας ότι: $ΑΓ = 155 \text{ m}$ και

$$\eta\mu\hat{B} = 0,31.$$

$$\text{Έχουμε ότι: } \eta\mu\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \text{ ή } ΒΓ = \frac{ΒΔ}{\eta\mu\hat{B}}$$

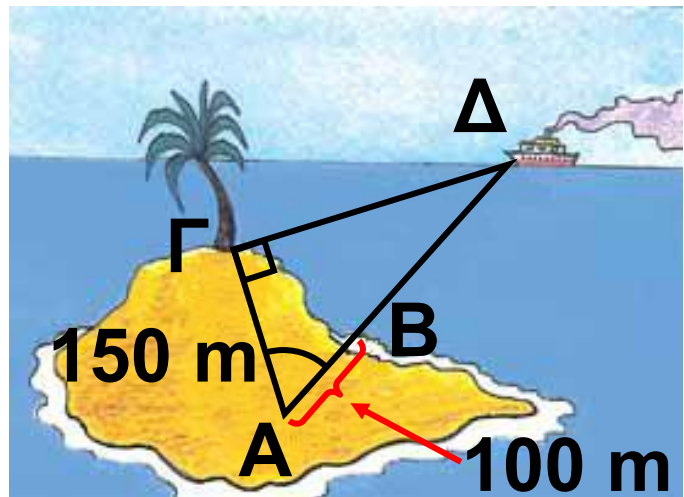
$$\text{ή } ΒΓ = \frac{155}{0,31} \text{ ή } ΒΓ = 500 \text{ m.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένας παρατηρητής A , που βρίσκεται 100 m από την ακτή B και 150 m από ένα δέντρο Γ , θέλει να υπολογίσει την απόσταση $ΒΔ$ του πλοίου Δ από την ακτή B . Μ' ένα γωνιόμετρο (ένα όργανο που μας επιτρέπει να μετράμε γωνίες) σκοπεύει το πλοίο και το δέντρο και βρίσκει τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma = 70^\circ$. Αν $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, να υπολογίσετε την απόσταση ΔB .

Λύση: Έστω $x = ΒΔ$ η απόσταση του πλοίου από την ακτή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ χρησιμοποιούμε το συνημίτονο της γωνίας των 70° .



Είναι: $\text{συν}70^\circ =$

$= \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} =$

$$= \frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{150}{100 + x}$$

Μ' έναν επιστημονικό υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε: $\text{συν}70^\circ = 0,34$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$0,34 = \frac{150}{100 + x} \text{ και έχουμε:}$$

$$(100 + x) \cdot 0,34 = 150 \quad \text{ή}$$

$$34 + 0,34 \cdot x = 150 \quad \text{ή}$$

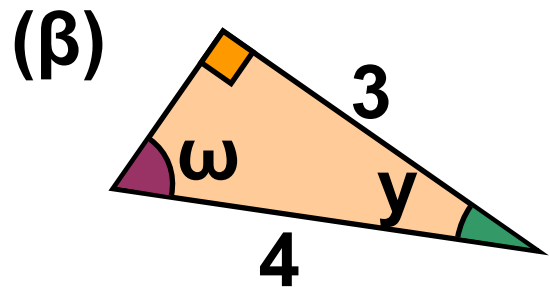
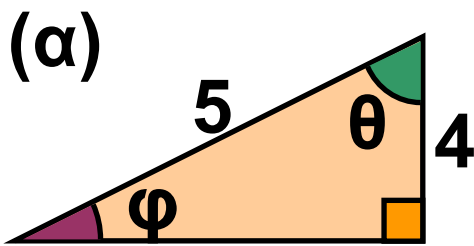
$$0,34 \cdot x = 150 - 34 \quad \text{ή}$$

$$x = \frac{116}{0,34} = 341,18 \text{ (m).}$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις που αφορούν τις γωνίες των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων:



α) Α: $\varphi < \theta$

Β: $\varphi = \theta$

Γ: $\varphi > \theta$

β) Α: $\omega < \gamma$

Β: $\omega = \gamma$

Γ: $\omega > \gamma$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λανθασμένο).

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

α) $\eta\mu 13^\circ < \eta\mu 15^\circ$



β) $\sigma\upsilon\nu 13^\circ < \sigma\upsilon\nu 15^\circ$



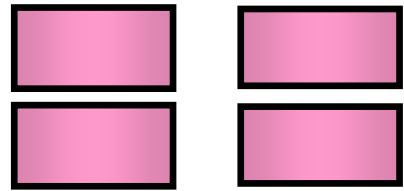
γ) $\sigma\upsilon\nu 57^\circ < \sigma\upsilon\nu 27^\circ$



δ) $\eta\mu 57^\circ < \eta\mu 27^\circ$



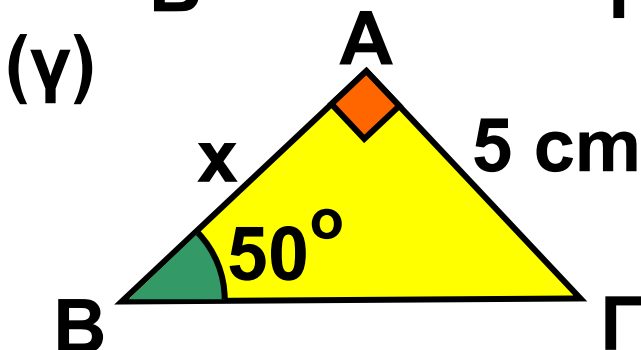
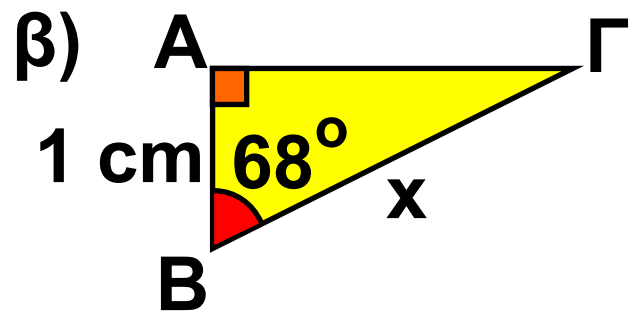
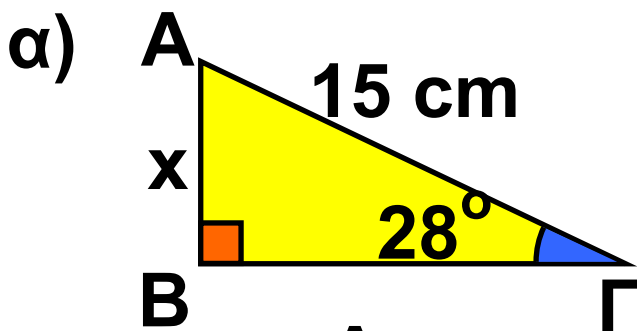
ε) $\eta\mu 32^\circ < \eta\mu 23^\circ$
 στ) $\sigma\upsilon\nu 32^\circ < \sigma\upsilon\nu 23^\circ$



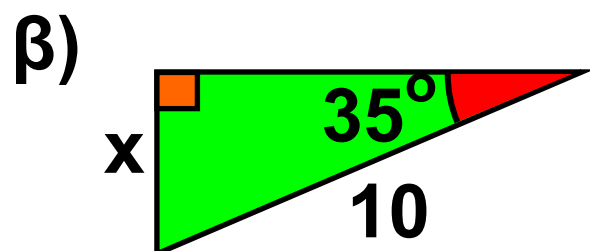
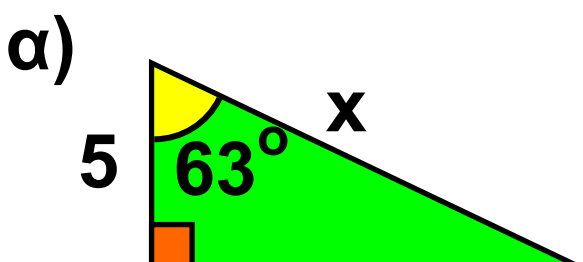
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

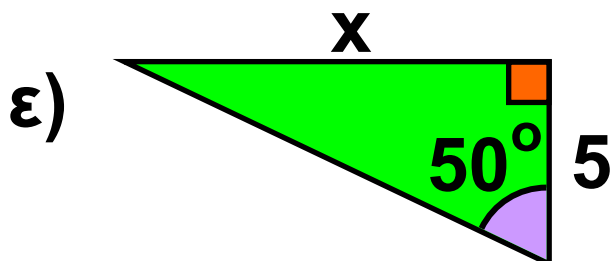
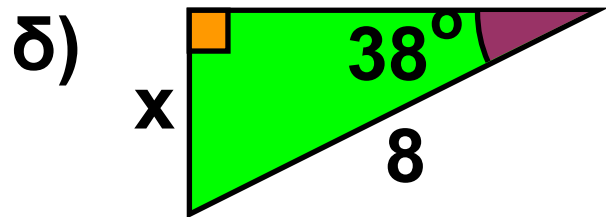
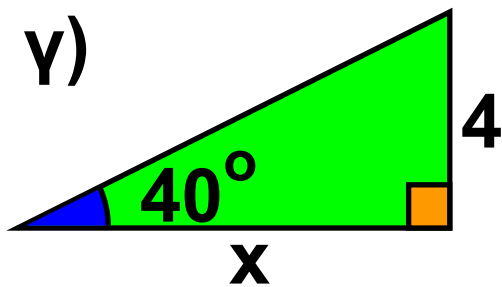


1 Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω τρίγωνα:

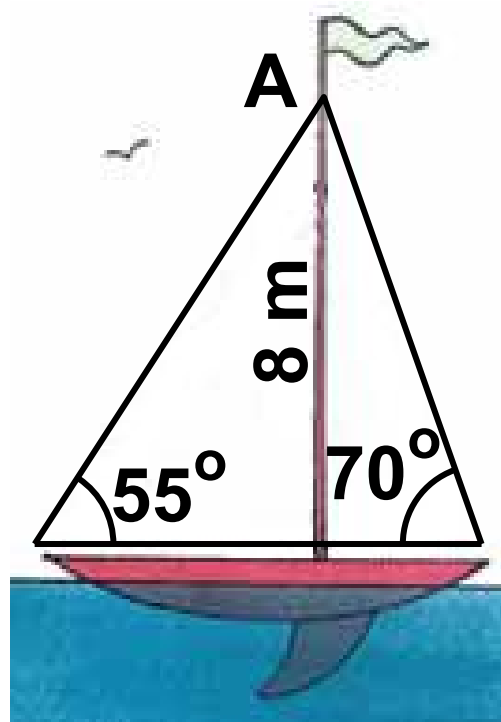


2 Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω τρίγωνα:



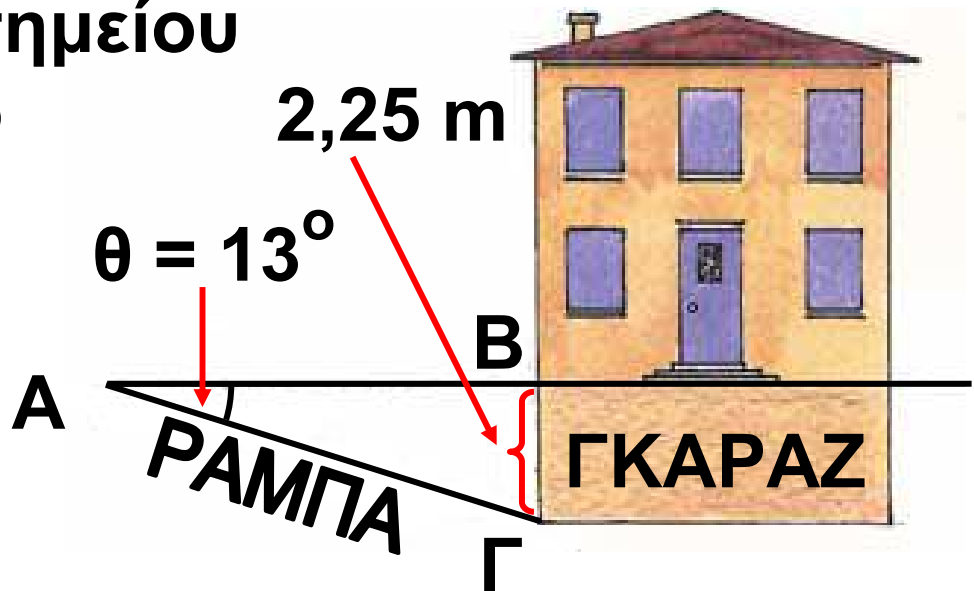


3 Σ' ένα ιστιοπλοϊκό σκάφος το ύψος του καταρτιού έως το σημείο A είναι 8 m. Να βρείτε το μήκος που έχουν τα συρματοσχοινα που στηρίζουν τα πανιά, αν αυτά σχηματίζουν γωνίες 55° και 70° αντίστοιχα με το επίπεδο της θάλασσας.



4 Ένας μηχανικός θέλει να κατασκευάσει ένα σπίτι με υπόγειο

γκαράζ. Το ύψος του γκαράζ πρέπει να είναι $B\Gamma = 2,25 \text{ m}$ και η κλίση της ράμπας $\theta = 13^\circ$. Να βρείτε το μήκος $A\Gamma$ της ράμπας και την απόσταση AB του σημείου A από το σπίτι.



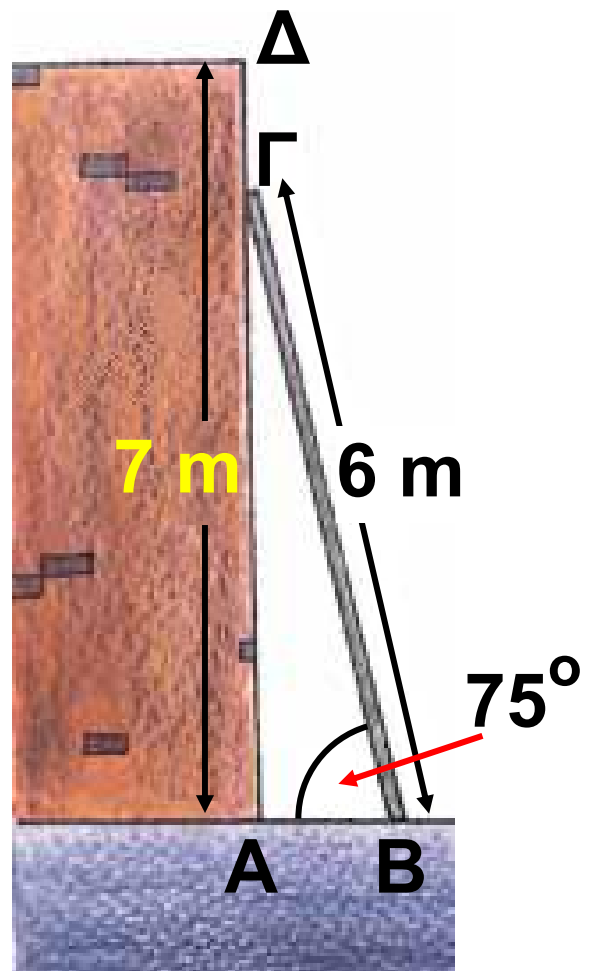
5 Να διατάξετε από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (χωρίς να τους υπολογίσετε):

α) $\eta\mu 37^\circ$, $\eta\mu 56^\circ$, $\eta\mu 16^\circ$ και $\eta\mu 20^\circ$

β) $\sigma\upsilon\nu 25^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 36^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu 28^\circ$

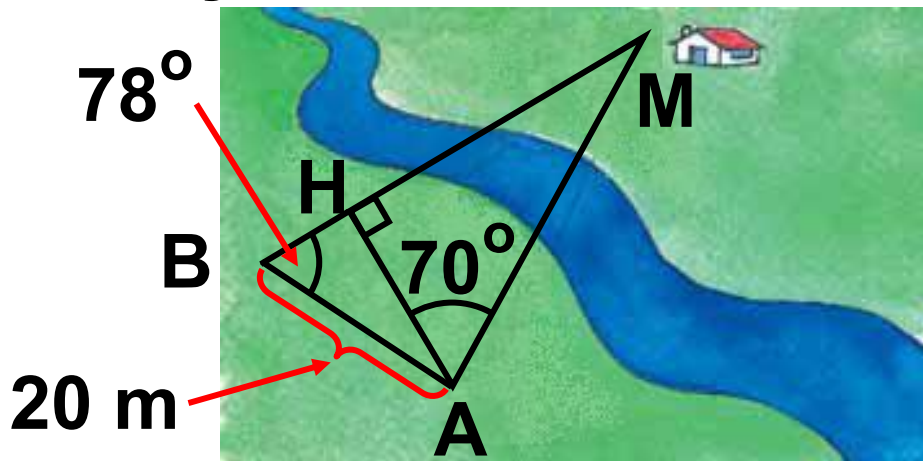
γ) $\epsilon\phi 18^\circ$, $\epsilon\phi 22^\circ$, $\epsilon\phi 51^\circ$ και $\epsilon\phi 89^\circ$

6 Μια σκάλα ύψους 6 m είναι ακουμπισμένη σε τοίχο ύψους 7 m. Για λόγους ασφαλείας, η γωνία στο έδαφος πρέπει να είναι 75° . Να βρείτε την απόσταση AB όπου πρέπει να τοποθετηθεί η βάση της σκάλας από τον τοίχο, καθώς και την απόσταση ΓΔ από το πάνω μέρος της σκάλας έως το πάνω μέρος του τοίχου.



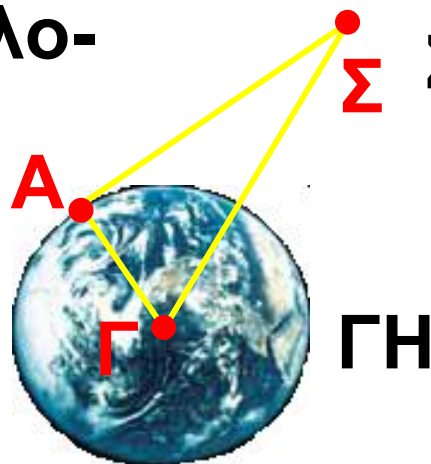
7 Ένας γεωλόγος θέλει να υπολογίσει την απόσταση από το σημείο A, όπου βρίσκεται, μέχρι το σπίτι M στην άλλη πλευρά ενός ποταμού. Χρησιμοποιεί ένα γειτονικό σημείο B που βρίσκεται σε απόσταση

$AB = 20 \text{ m}$ και με τη βοήθεια ενός γωνιόμετρου βρίσκει ότι $\angle ABM = 78^\circ$ και $\angle BAM = 70^\circ$. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις AH και AM .



8 Η ακτίνα της Γης είναι $R = GA = 6371 \text{ km}$ και η γωνία $\widehat{AG\Sigma}$ είναι $89,05^\circ$. Να υπολο-

γίσετε με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος την απόσταση Γης - Σελήνης ($ΓΣ$).



Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° – 89°

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί- τονο	εφαπτο- μένη
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί- τονο	εφαπτο- μένη
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί- τονο	εφαπτο- μένη
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί- τονο	εφαπτο- μένη
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί- τονο	εφαπτο- μένη
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	,01908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443

Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημί- τονο	εφαπτο- μένη
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,2698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900

Περιεχόμενα 1ου τόμου

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1.1 – Εμβαδό επίπεδης επιφάνειας	10
1.2 – Μονάδες μέτρησης επιφανειών	18
1.3 – Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	31
1.4 – Πυθαγόρειο θεώρημα.....	61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2.1 – Εφαπτομένη οξείας γωνίας	91
---	----

2.2 – Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	112
2.3 – Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	132

Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο, θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7, του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).



***Απαγορεύεται η αναπαραγωγή
οποιοδήποτε τμήματος αυτού του
βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα
(copyright), ή η χρήση του σε
οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή
άδεια του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.***

